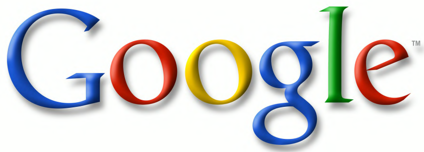




# ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

---

1

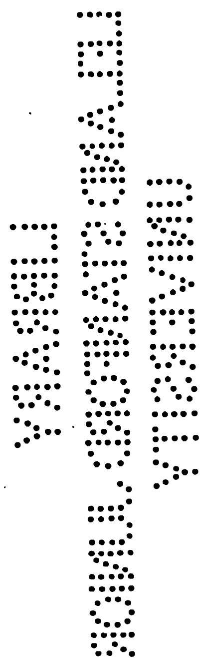
STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1882.
IMPRIMERIE CENTRALE.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

# REDACTION





HANS MAJESTÄT

# KONUNG OSCAR II,

genom hvilkens
högsinnade beskydd och kraftiga understöd
utgifvandet af denna tidskrift blifvit möjliggjordt,
hembäres underdånigast Redaktionens
vördnadsfulla tacksamhet.

C'est à la munificence de Sa Majesté le roi OSCAR II que nous devons d'avoir pu fonder le journal dont nous offrons la première livraison aux amis des mathématiques. *L'Association en mémoire de Lars Hierta,* la *Fondation de Letterstedt* ainsi que les personnes dont les noms suivent ici — *C. J. Malmsten, Ch. Hermite, Fr. P:son Beijer, F. Kempe, H. R. Astrup, C. Ekman, N. G. Sörensen, O. Wijk, Fr. Piper, O. Dickson, B. Kempe, W. Kempe, S. Axell, L. E. Rubenson, C. O. Rubenson* — ont également contribué aux frais de l'oeuvre dont l'auguste souverain a daigné se constituer le protecteur.

L'époque à laquelle nous commençons notre publication est certainement l'une des plus fécondes dans l'histoire des mathématiques, par le grand nombre et l'importance des découvertes qui touchent aux principes les plus essentiels de l'analyse. On sait combien, en divers pays, ce mouvement a été puissamment secondé par des journaux mathématiques, qui contiennent les oeuvres

Der Grossmuth Seiner Majestät des Königs OSCAR II verdanken wir es diese Zeitschrift gründen zu können, deren erste Lieferung wir hiermit den Freunden der Mathematik übergeben. Die Stiftung *Lars Hierta's Andenken* und der *Letterstedt'sche Verein* sowie verschiedene Personen, deren Namen in dankbarer Anerkennung hier genannt werden — *C. J. Malmsten, Ch. Hermite, Fr. P:son Beijer, F. Kempe, H. R. Astrup, C. Ekman, N. G. Sörensen, O. Wijk, Fr. Piper, O. Dickson, B. Kempe, W. Kempe, S. Axell, L. E. Rubenson, C. O. Rubenson* — haben gleichfalls zur Deckung der Kosten des Unternehmens beigetragen, welches der erhabene Fürst unter seinen besonderen Schutz zu nehmen geruht hat.

Der Zeitpunkt, zu welchem wir die Herausgabe beginnen, ist gewiss einer der fruchtbarsten in der Geschichte der Mathematik, wegen der grossen Anzahl und Wichtigkeit der Entdeckungen auf dem Gebiete der Analysis. Dieses rege Leben ist durch die in verschiedenen

des plus grands géomètres de notre temps. Nous nous sommes proposé le même but, de servir la science, en réunissant et associant les recherches nouvelles qui concourent à son progrès, par la nouveauté des résultats ou l'originalité des méthodes.

Des mathématiciens éminents dans tous les pays, en nous assurant de leur collaboration, nous ont donné un témoignage de sympathie qui nous pénètre de reconnaissance, et que nous voulons justifier par les soins et le zèle que nous apporterons à notre publication.

Le journal paraîtra à époques variables en livraisons dont quatre formeront un volume d'environ cinquante feuilles.

Qu'il nous soit permis d'espérer qu'une entreprise inspirée par le seul amour de la science, recevra de tous les géomètres auxquels elle s'adresse un favorable et bienveillant accueil!

*La rédaction.*

Ländern herausgegebenen mathematischen Zeitschriften, welche die Arbeiten der ersten Mathematiker unserer Zeit enthalten, wesentlich gefördert worden. Unser Zweck ist nun in derselben Richtung mitzuarbeiten, indem wir Abhandlungen sammeln und veröffentlichen, welche durch das Bemerkenswerthe ihrer Resultate oder die Originalität der Methoden zur Förderung der Wissenschaft beitragen.

Hervorragende Mathematiker aller Länder haben, indem sie ihre Mitwirkung zusagten, uns einen Beweis ihrer Theilnahme gegeben, der uns zu grösstem Danke verpflichtet, und welchem wir durch den Eifer und die Sorgfalt zu entsprechen hoffen, die wir unseren Veröffentlichungen widmen werden.

Die Zeitschrift erscheint in zwanglosen Heften, deren je vier einen Band von ungefähr fünfzig Bogen bilden werden.

Möchte dem Unternehmen, was nur aus reiner Liebe zur Wissenschaft entstanden ist, bei den Mathematikern eine günstige und wohlwollende Aufnahme zu Theil werden!

*Die Redaction.*

# THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS

PAR H. POINCARÉ

à PARIS.

Dans une série de mémoires présentés à l'Académie des Sciences j'ai défini certaines fonctions nouvelles que j'ai appelées fuchsiennes, kleinéennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes. De même que les fonctions elliptiques et abéliennes permettent d'intégrer les différentielles algébriques, de même les nouvelles transcendantes permettent d'intégrer les équations différentielles linéaires à coëfficients algébriques. J'ai résumé succinctement les résultats obtenus dans une note insérée aux *Mathematische Annalen.* Ayant l'intention de les exposer en détail, je commencerai, dans le présent travail, par étudier les propriétés des groupes fuchsiens, me réservant de revenir plus tard sur leurs conséquences au point de vue de la théorie des fonctions.

## § 1. Substitutions réelles.

Soit $z$ une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan; $t$ une fonction imaginaire de cette variable définie par la relation:

$$t = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{1}$$

Je supposerai, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'on a:

$$ad - bc = 1.$$

Si le point $z$ décrit deux arcs de courbe se coupant sous un certain angle $\alpha$, le point $t$ décrira de son côté deux arcs de courbe se coupant

sous le même angle $\alpha$, c'est à dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ (¹) *conserve les angles.*

La fonction $\frac{az+b}{cz+d}$ est en effet monogène.

Si $z$ décrit un cercle, $t$ décrit également un cercle; c'est à dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ change les cercles en cercles.

Enfin si $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ sont quatre valeurs de $z$ et si $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ sont les valeurs correspondantes de $t$, on a:

$$(2) \qquad \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3}\,\frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\,\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

Il existe en général deux valeurs de $z$ qui sont égales aux valeurs correspondantes de $t$; c'est ce qu'on appelle les points doubles de la substitution (1).

Si $$(a + d)^2 \gtrless 4$$

les points doubles sont distincts; et si nous les appelons $\alpha$ et $\beta$ la relation (1) peut s'écrire:

$$(3) \qquad \frac{t - \alpha}{t - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

$K$ étant une constante que j'appellerai *multiplicateur.*

Si au contraire

---

(¹) J'emploierai dans ce qui suit les notations de M. Jordan.

La substitution $[z, f(z)]$ ou bien $[x, y; f(x, y), \varphi(x, y)]$ sera l'opération qui consiste à changer $z$ en $f(z)$ ou bien celle qui consiste à changer $x$ en $f(x, y)$ et $y$ en $\varphi(x, y)$. La substitution inverse de $[z, f(z)]$ sera $[f(z), z]$; le produit de deux substitutions sera l'opération qui consiste à faire successivement ces deux substitutions.

Un système de substitutions formera un *groupe* si la substitution inverse de toute substitution du système et le produit de deux substitutions quelconques du système font également partie du système.

Un groupe $A$ est *isomorphe* à un autre groupe $B$ si à toute substitution de $B$ correspond une et une seule substitution de $A$ et de telle sorte qu'au produit de deux substitutions de $B$, corresponde le produit des deux substitutions correspondantes de $A$.

Si $B$ est également isomorphe à $A$, les deux groupes sont isomorphes entre eux et l'isomorphisme est *holoèdrique;* autrement il est *mérièdrique.*

$$(a+d)^2 = 4$$

les points doubles se confondent et l'on a:

$$\alpha = \beta.$$

La relation (1) peut alors s'écrire:

(4) $$\frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + c$$

Telles sont les principales propriétés des substitutions linéaires $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$. Mais nous allons faire une hypothèse de plus; nous supposerons que les coëfficients $a$, $b$, $c$, $d$ sont réels. Je dirai alors que la substitution (1) est une *substitution réelle.*

Il en résulte que la partie imaginaire de $t$ est positive, nulle ou négative selon que la partie imaginaire de $z$ est elle-même positive, nulle ou négative; c'est à dire que la substitution (1) conserve l'axe des parties réelles que j'appellerai désormais $X$ et change également en elle-même la partie du plan qui est au dessus de cet axe.

Si $z$ décrit un cercle ayant son centre sur $X$, $t$ décrira également un cercle ayant son centre sur $X$. Si $z_1$ et $z_2$ sont deux quantités imaginaires conjuguées, les valeurs correspondantes $t_1$ et $t_2$ de $t$ seront aussi imaginaires conjuguées.

Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux valeurs de $z$, $\gamma$ et $\delta$ les valeurs correspondantes de $t$; si $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ sont les valeurs conjuguées de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; on aura en vertu de la relation (2)

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}.$$

Si l'on pose pour abréger:

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = (\alpha, \beta)$$

cette relation s'écrira:

(5) $$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta).$$

Les substitutions réelles ont été étudiées par différents géomètres et en particulier par M[r] Klein dans ses recherches sur les fonctions modulaires; il les a partagées en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Les substitutions elliptiques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 < 4.$$

Les points doubles $\alpha$ et $\beta$ sont imaginaires conjugués; l'un d'eux est par conséquent au dessus de $X$, l'autre au dessous; la relation (1) peut se mettre sous la forme (3) et la constante $K$ est une quantité imaginaire dont le module est l'unité. Si $z$ décrit un cercle passant par $\alpha$ et $\beta$, $t$ décrira également un cercle passant par $\alpha$ et $\beta$ et coupant le premier sous un angle égal à l'argument de $K$.

La substitution (1) change en elle-même toute circonférence qui ayant son centre sur le prolongement de $\alpha\beta$ coupe ce segment harmoniquement.

Les substitutions paraboliques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 = 4.$$

Les points doubles se confondent en un seul qui est situé sur $X$. La relation (1) se met sous la forme (4) et de telle sorte que $\alpha$ soit réel. Si $z$ décrit un cercle passant par $\alpha$, $t$ décrira également un cercle passant par $\alpha$ et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui sont tangentes à $X$ en $\alpha$. Soit $C$ une pareille circonférence; soit $m_0$ un point de cette circonférence $C$, la substitution (1) le changera en un autre point $m_1$ de cette même circonférence; elle changera $m_1$ en un autre point $m_2$ de $C$, $m_2$ en un autre point $m_3$, etc. Quand $x$ tendra vers l'infini le point $m_x$ se rapprochera indéfiniment de $\alpha$. Soit de même $m_{-1}$ le point que la substitution (1) change en $m_0$, $m_{-2}$ le point que cette substitution change en $m_{-1}$, etc. Quand $x$ tendra vers l'infini, le point $m_{-x}$ se rapprochera aussi indéfiniment de $\alpha$.

J'appelle $C_x$ le cercle qui a son centre sur $X$ et qui passe par $\alpha$ et par $m_x$; qui par conséquent coupe orthogonalement le cercle $C$ en $\alpha$ et en $m_x$. Il est clair que la substitution (1) changera $C_{-1}$ en $C_0$, $C_0$ en $C_1$, $C_1$ en $C_2$, etc. et en général $C_x$ en $C_{x+1}$. De plus si $x$ est infini positif ou négatif, $C_x$ se réduit à un cercle de rayon infiniment petit. C'est dire que si l'on applique une infinité de fois la substitution (1), ou la

substitution inverse à un cercle passant par $\alpha$ et ayant son centre sur $X$, le rayon de ce cercle devient infiniment petit.

Il en résulte qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas $X$ ne pourra rencontrer un nombre infini de cercles $C_\varkappa$, c'est à dire de transformés successifs d'un cercle $C_0$ ayant son centre sur $X$ et passant par $\alpha$.

Les substitutions hyperboliques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 > 4.$$

Les points doubles $\alpha$ et $\beta$ sont distincts et situés sur $X$. La relation (1) se met sous la forme (3) et de telle sorte que $K$ soit réel et positif. Je puis de plus toujours supposer:

$$K > 1.$$

Si $z$ décrit un cercle passant par $\alpha$ ou par $\beta$, $t$ décrira également un cercle passant par $\alpha$ ou par $\beta$ et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui passent par $\alpha$ et $\beta$.

J'appelle comme plus haut $C$ une circonférence passant par $\alpha$ et $\beta$, et

$$\ldots\ldots\ldots m_{-2},\ m_{-1},\ m_0,\ m_1,\ m_2,\ldots\ldots\ldots$$

une série de points tels que la substitution (1) change $m_\varkappa$ en $m_{\varkappa+1}$. Il est clair que le point $m_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment de $\beta$ quand $\varkappa$ tendra vers $+\infty$ et de $\alpha$ quand $\varkappa$ tendra vers $-\infty$.

J'appelle aussi $C_\varkappa$ le cercle qui ayant son centre sur $X$ passe par $\alpha$ et par $m_\varkappa$. Lorsque $\varkappa$ tendra vers $+\infty$, $C_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre; lorsque $\varkappa$ tendra vers $-\infty$, le rayon de $C_\varkappa$ diminuera indéfiniment. C'est dire que si l'on applique la substitution (1) une infinité de fois à un cercle $C_0$ passant par $\alpha$ et ayant son centre sur $X$, on obtiendra à la limite un cercle ayant $\alpha\beta$ pour diamètre. Si on applique une infinité de fois à $C_0$ la substitution inverse, le rayon limite sera nul.

Si au contraire on appliquait une infinité de fois la substitution (1) à un cercle passant par $\beta$ et ayant son centre sur $X$, le rayon limite serait nul, tandis qu'en lui appliquant une infinité de fois la substitution inverse, on obtiendrait à la limite le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Il résulte de là qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas $X$, rencontrera un nombre infini de cercles $C_x$, c'est à dire de transformés successifs du cercle $C_0$, ou bien un nombre fini de ces transformés, selon qu'il rencontrera ou ne rencontrera pas le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Si l'on a:

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

il existe une substitution réelle qui change $\alpha$ en $\gamma$ et $\beta$ en $\delta$. Cette substitution est définie par la relation:

$$\frac{t-\gamma}{t-\delta}\frac{\gamma'-\delta}{\gamma'-\gamma} = \frac{z-\alpha}{z-\beta}\frac{\alpha'-\beta}{\alpha'-\alpha}.$$

Il est une autre propriété des substitutions réelles sur laquelle je voudrais attirer l'attention; en différentiant la relation (1) on trouve:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Si de plus j'appelle $y$ la partie imaginaire de $z$, $Y$ celle de $t$, je trouve:

$$\operatorname{mod}\frac{dt}{dz} = \frac{Y}{y}.$$

## § 2. Figures congruentes.

Je dirai que deux figures sont *congruentes* quand l'une est la transformée de l'autre par une substitution *réelle*. Les substitutions réelles formant un groupe, il est clair que deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles.

Je puis énoncer tout d'abord les théorèmes suivants:

Dans deux figures congruentes les angles homologues sont égaux.

Si dans deux figures congruentes, le point $\gamma$ est homologue de $\alpha$ et le point $\delta$ homologue de $\beta$, on a:

$$(1) \qquad (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta).$$

Cette relation peut prendre une autre forme.

Considérons en effet les quantités $\alpha$, $\beta$ et leurs conjuguées $\alpha'$, $\beta'$ de telle sorte que:

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'}.$$

Les quatre points $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ sont sur un même cercle qui a son centre sur $X$. Supposons de plus que $\alpha$ et $\beta$ soient tous deux au-dessus de $x$. Ce cercle coupe $X$ en deux points que j'appelle $h$ et $k$; $h$ sera celui de ces deux points qui est sur l'arc $\beta\beta'$, $k$ celui de ces deux points qui est sur l'arc $\alpha\alpha'$. Je pose

$$[\alpha, \beta] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \frac{\beta - k}{\beta - h}.$$

$[\alpha, \beta]$ est essentiellement réel, positif et plus grand que 1. De plus on a:

$$(\alpha, \beta) = \frac{4 [\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta] + 1)^2}.$$

Si $\gamma$ est un point de l'arc de cercle $\alpha\ \beta$, on a:

$$[\alpha, \gamma] [\gamma, \beta] = [\alpha, \beta].$$

Il est clair maintenant qu'en employant cette notation nouvelle, on peut mettre la relation (1) sous la forme:

$$[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Voyons ce qui se passera quand $\alpha$ et $\beta$ seront infiniment voisins.

Soit:

$$z = x + y \sqrt{-1}$$
$$dz = dx + dy \sqrt{-1}$$
$$\mathrm{mod}\, dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

On aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur:

$$[z, z + dz] = 1 + \frac{\mathrm{mod}\, dz}{y}$$

ou:

$$L\, [z, z + dz] = \frac{\mathrm{mod}\, dz}{y}.$$

On voit ainsi que le logarithme népérien de $[z, z + dz]$ est proportionnel au module de $dz$ et indépendant de son argument.

L'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{mod}\, dz}{y}$$

prise le long d'un arc de courbe quelconque s'appellera la $L$ de cette courbe.

L'intégrale double:

$$\iint \frac{dx\,dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur d'une aire plane quelconque sera la $S$ de cette aire.

D'après ce qui précède deux arcs de courbe congruents ont même $L$; deux aires congruentes ont même $S$. La $L$ d'un arc de cercle $\alpha\beta$ ayant son centre sur $X$ sera le logarithme népérien de $[\alpha, \beta]$.

Je ne puis passer sous silence le lien qui rattache les notions précédentes à la géométrie non-euclidienne de Lobatchewski.

Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots *droite, longueur, distance, surface* leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle qui a son centre sur $X$, longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa $L$, distance de deux points la $L$ de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur $X$ et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa $S$.

Supposons de plus qu'on conserve aux mots *angle* et *cercle* leur signification, mais en convenant d'appeler centre d'un cercle le point qui est à une distance constante de tous les points du cercle (d'après le sens nouveau du mot distance) et rayon du cercle cette distance constante.

Si l'on adopte ces dénominations, *les théorèmes de Lobatchewski sont vrais,* c'est à dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ces nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.

Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, mais je ne l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion.

## § 3. **Groupes Discontinus.**

Envisageons une infinité de substitutions de la forme:

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) \tag{1}$$

qui, en posant pour abréger:

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$$

peuvent s'écrire sous la forme:

$$[z, f_i(z)].$$

Pour abréger encore, je dirai simplement la substitution

$$f_i(z).$$

Je suppose que $i$ est un indice qui varie de 0 à l'infini.

Je suppose de plus:

$$a_0 = d_0 = 1, \qquad b_0 = c_0 = 0$$

d'où

$$f_0(z) = z.$$

Je suppose enfin que ces substitutions forment un groupe.

Je vais définir certains symboles dont je serai amené à faire usage dans la suite. Je poserai:

$$f_i^2(z) = f_i[f_i(z)],\ f_i^3(z) = f^i[f_i^2(z)], \ldots\ldots f_i^m(z) = f_i[f_i^{m-1}(z)] \ldots\ldots$$

Je définirai de même, par une extension toute naturelle, le symbole $f_i^m(z)$ quand $m$ sera nul ou négatif. Je poserai:

$$f_i^0(z) = z,\ \ z = f_i^{-1}[f_i(z)],\ \ f_i^{-m}(z) = f_i^{-1}[f_i^{-m+1}(z)].$$

Si $f_1(z)$ est une des substitutions du groupe envisagé, toutes les substitutions qui sont comprises dans la formule générale:

(2) $$f_1^m(z)$$

feront également partie du groupe.

Si $f_2(z)$ est une substitution du groupe non comprise dans la formule (2), toutes les substitutions de la forme:

(3) $$f_1^\alpha(f_2^\beta(f_1^\gamma(f_2^\delta(\ldots\ldots\ldots(f_1^\lambda(f_2^\mu(z))\ldots\ldots))$$

appartiendront au groupe.

Si maintenant $f_3(z)$ est une substitution du groupe qui ne soit pas comprise dans la formule (3), c'est à dire qui ne soit pas une combinaison de $f_1$ et de $f_2$, si $f_4$ est une substitution du groupe qui ne soit pas une combinaison de $f_1$, $f_2$ et $f_3$, etc. ...... si enfin $f_p$ est une substitution qui ne soit pas une combinaison de $f_1, f_2, \ldots\ldots f_{p-1}$, les substitutions comprises dans la formule générale:

$$(4)\qquad f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots\ldots\ldots(f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z))\ldots\ldots\ldots))$$

(où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ sont des indices qui peuvent être 1, 2, 3, ...... $p-1$ ou $p$, et où $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n$ sont des entiers positifs ou négatifs) feront également partie du groupe.

Il peut se faire que l'on ait épuisé ainsi toutes les substitutions du groupe envisagé, de telle sorte que toute substitution de ce groupe soit une combinaison de $f_1, f_2, \ldots, f_p$. On dit alors que le groupe est *dérivé* de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, ou que $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont un système de *substitutions fondamentales* du groupe. Il est évident qu'un groupe peut avoir une infinité de systèmes de substitutions fondamentales; mais *un seul de ces systèmes suffit pour déterminer complètement le groupe.*

On peut concevoir aussi des groupes tels qu'il soit impossible de les faire dériver d'un nombre fini de substitutions fondamentales. Mais nous les laisserons systématiquement de côté.

Soit donc un groupe $G$ dérivé de $p$ substitutions fondamentales $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de telle sorte que toutes ses substitutions soient de la forme (4).

J'appellerai *exposant* d'une substitution de ce groupe la somme des modules des nombres entiers positifs ou négatifs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Il peut se faire que les diverses substitutions contenues dans la formule (4) ne soient pas toutes distinctes et que l'on ait identiquement:

$$(5)\qquad f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots\ldots\ldots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z))\ldots) = f_{\gamma_1}^{\delta_1}(f_{\gamma_2}^{\delta_2}(\ldots\ldots f_{\gamma_m}^{\delta_m}(z)\ldots\ldots\ldots))$$

La relation (5) peut toujours se mettre sous la forme:

$$(6)\qquad f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots\ldots\ldots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z)\ldots\ldots\ldots)) = z.$$

Les $\alpha$ et les $\beta$ ont ici la même signification que dans la formule (4).

Les relations de la forme (6) pourront en général être toutes regardées comme les conséquences d'un certain nombre d'entre elles que nous appellerons *relations fondamentales* et qui seront seules réellement distinctes.

Un groupe $H$ sera isomorphe à $G$ s'il est dérivé d'un même nombre de substitutions fondamentales, et si l'on a entre ses substitutions fondamentales les mêmes relations fondamentales. Si entre les substitutions de $H$ il n'y a pas d'autre relation de la forme (6) qu'entre celles de $G$, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent *holoèdrique;* autrement il est *mérièdrique.*

Par suite des relations (6), une même substitution peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (4); de sorte que la définition donnée plus haut de *l'exposant d'une substitution* laisse subsister une certaine ambiguïté. Nous appellerons alors exposant d'une substitution *la plus petite* valeur que peut prendre la somme des modules de $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ quand on écrit cette substitution sous la forme (4).

Ici il y a lieu de faire une distinction importante entre les différentes sortes de groupes formés de substitutions réelles. Nous devons d'abord laisser de côté les groupes qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions et qui ont déjà été étudiés à fond par plusieurs géomètres. Mais si les substitutions d'un groupe sont en nombre infini, on peut faire deux hypothèses différentes:

On peut supposer qu'il est possible de choisir dans le groupe une substitution

$$(z, f_i(z))$$

telle que $f_i(z)$ diffère infiniment peu de $z$; (et cela quel que soit $z$) c'est à dire que le groupe contient une substitution infinitésimale.

On peut supposer aussi que le groupe ne contient pas de pareille substitution.

Les groupes de la première espèce seront *continus,* ceux de la seconde *discontinus.*

Il ne peut exister de fonction uniforme analytique de $z$ qui reste inaltérée par les substitutions d'un groupe continu, car cette fonction devrait reprendre la même valeur en des points infiniment voisins les uns des autres et, par conséquent, avoir une valeur constante. Aussi les groupes continus n'ont-ils aucun intérêt pour nous et réserverons-nous le nom de *groupes fuchsiens* aux groupes discontinus formés de substitutions réelles.

Si le groupe $G$ est discontinu, il est clair qu'on pourra diviser le plan ou une partie du plan en une infinité de régions jouissant des propriétés suivantes:

Chacune d'elles correspondra à l'une des substitutions du groupe $G$. Celle qui correspondra à la substitution:

$$(z, f_i(z))$$

s'appellera la région $R_i$ et par conséquent celle qui correspondra à la substitution:

$$(z, f_0(z)) \text{ ou } (z, z)$$

s'appellera $R_0$.

*Quand $z$ sera intérieur à la région $R_0$, $f_i(z)$ devra être intérieur à $R_i$.* En d'autres termes, $R_i$ sera la transformée de $R_0$ par la substitution:

$$(z, f_i(z)).$$

Supposons maintenant que $z$ soit intérieur à la région $R_K$ correspondant à:

$$(z, f_K(z)).$$

$f_K^{-1}(z)$ devra être intérieur à $R_0$ et par conséquent $f_i(f_K^{-1}(z))$ sera intérieur à $R_i$.

Dire que $R_i$ est transformée de $R_0$ par une substitution réelle, c'est dire que ces régions sont congruentes et par conséquent que toutes les régions $R$ sont congruentes entre elles.

Pour me servir d'une expression très usitée de l'autre côté du Rhin, je dirai que la division d'un plan en une infinité de régions est *régulière* lorsqu'en déformant ces régions d'une manière continue on pourra faire coïncider le nouveau mode de division avec l'ancien de telle façon que chaque région de la nouvelle division vienne coïncider avec une région de l'ancienne, et qu'une région donnée quelconque du nouveau mode de division vienne coïncider avec une région *donnée également quelconque* de l'ancien mode. En ce qui concerne le mode de division qui nous occupe, il est clair que si l'on applique aux différentes régions $R$ la substitution

$$[z, f_i(z)]$$

chacune des régions $R$ se changera en une autre région $R$ et $R_0$ se changera en $R_i$. C'est dire que la division du plan sera régulière.

Le problème de la recherche des groupes fuchsiens se ramène donc au suivant: *Subdiviser d'une façon régulière le plan ou une partie du plan en une infinité de régions toutes congruentes entre elles.*

Deux régions seront dites limitrophes lorsqu'elles confineront entre elles tout le long d'un arc de courbe qui leur servira de frontière commune.

Soit $R_p$ une région limitrophe de $R_0$ tout le long d'un arc $AB$ de son périmètre; cet arc $AB$ sera *l'un des côtés de $R_0$*. Mais on peut sup-

poser que ce ne soit pas le plan tout entier, mais une partie du plan qui ait été divisée en une infinité de régions $R$, toutes congruentes entre elles. Dans ce cas, $R_0$ pourra confiner tout le long d'un arc $CD$ de son périmètre à la partie du plan qui n'aura pas été subdivisée en régions $R$. Cet arc $CD$ sera encore *un des côtés de* $R_0$. Les côtés tels que $AB$ seront ceux de la 1ère sorte, les côtés tels que $CD$ ceux de la 2me sorte.

Je supposerai toujours que les côtés de la 2me sorte sont des segments de l'axe $X$.

Je justifie en quelques mots cette hypothèse. Si l'on a divisé une partie du plan en une infinité de régions $R$, et si la région $R_0$ est contiguë à la partie du plan non divisée, on pourra toujours étendre la division à une portion plus grande du plan. Je l'étendrai jusqu' à ce que $R_0$ cesse d'être contiguë à la partie non divisée, ou jusqu' à ce que $R_0$ atteigne l'axe $X$. Cet aperçu suffira, je pense, pour faire comprendre les raisons qui me permettent d'adopter cette hypothèse.

J'appellerai sommets de $R_0$ les extrémités de ses côtés et je serai conduit à envisager: 1° les sommets situés au dessus de $X$; 2° les sommets situés sur $X$ et séparant deux côtés de la 1ère sorte; 3° les sommets situés sur $X$ et séparant un côté de la 1ère sorte et un de la 2me sorte. J'appellerai ces différents sommets, sommets de la 1ère, de la 2de ou de la 3me catégorie.

Les points

$$z, f_1(z), f_2(z) \ldots\ldots. f_i(z) \ldots\ldots.$$

seront dits *correspondants*.

Quand le point $z$ est à l'intérieur de $R_0$, tous les points $f_i(z)$ seront dans des régions $R_i$ différentes de $R_0$. Donc il ne peut y avoir dans l'intérieur de $R_0$ deux points correspondants, et un point intérieur à $R_0$ ne peut être non plus correspondant d'un point du périmètre de cette région.

Au contraire un point situé sur l'un des côtés de $R_0$, sur $\lambda_p$ par exemple, appartient à la fois à deux régions $R_0$ et $R_p$. Si le point $z$ est sur $\lambda_p$, c'est à dire sur le périmètre de $R_p$, le point $f_p^{-1}(z)$ sera sur le périmètre de $R_0$ sur un côté que j'appellerai $\lambda_p'$ et qui séparera $R_0$ d'une région $R_p'$ correspondant à la substitution:

$$(z, f_p^{-1}(z)).$$

Les côtés $\lambda_p$ et $\lambda'_p$ seront dits conjugués.

On peut tirer de là les conclusions suivantes: 1° Les côtés de la 1ère sorte sont en nombre pair et conjugués deux à deux. 2° Deux côtés conjugués sont congruents. 3° Les points du périmètre de $R_0$ (sans parler des sommets dont nous nous occuperons plus loin) sont correspondants deux à deux.

Une convention spéciale est nécessaire pour faire rentrer dans le cas général un cas particulier qui se présentera quelquefois.

Il pourrait arriver que l'on eût identiquement:

$$f_p(z) = f_p^{-1}(z) \text{ ou } z = f_p[f_p(z)].$$

Alors $R_p$ coïnciderait avec $R'_p$, $\lambda_p$ avec $\lambda'_p$. Mais dans ce cas, la substitution

$$(z, f_p(z))$$

est elliptique et la relation (1) § 1 pourrait se mettre sous la forme (3) § 1 de telle façon que:

$$K = -1.$$

La substitution $(z, f_p(z))$ n'altérant pas le côté $\lambda_p$, celui-ci devra passer par le point $\alpha$ (point double de la substitution) et se partager en deux moitiés congruentes entre elles.

Cela posé on pourra regarder le point $\alpha$ comme un sommet et les deux moitiés du côté $\lambda_p$ comme deux côtés distincts, conjugués entre eux; l'on est ainsi ramené au cas général.

Chaque sommet appartient à trois ou plusieurs régions différentes; il en résulte que plusieurs sommets de $R_0$ peuvent être correspondants. Je dirai que les sommets correspondants appartiennent à un même cycle.

D'après ce qui précède le nombre des côtés de la 1ère sorte est pair; soit $2n$ ce nombre. Ces $2n$ côtés seront conjugués deux à deux. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ $n$ de ces côtés; $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots\ldots \lambda_{2n}$ les $n$ autres côtés conjugués des premiers, de telle sorte que les côtés $\lambda_p$, $\lambda_{n+p}$ soient conjugués. Soit $R_p$ la région qui est limitrophe de $R_0$ le long du côté $\lambda_p$, et

$$(z, f_p(z))$$

la substitution correspondante. De cette façon, on aura:

$$f_{n+p}(z) = f_p^{-1}(z).$$

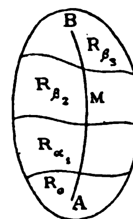
Il est aisé de voir que si l'on sort d'une région $R_i$ correspondant à:

$$(z, f_i(z))$$

par le côté $\lambda_p$, on entre dans une région correspondant à la substitution

$$(z, f_i[f_p(z)]).$$

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver quelle est la substitution qui correspond à une région donnée $R_{\beta_\nu}$. Soit $A$ un point intérieur à $R_0$, $B$ un point intérieur à $R_{\beta_\nu}$; joignons ces deux points par un arc quelconque $AMB$. Si je suppose que cet arc $AMB$ parte de la région $R_0$, qu'il en sorte par le côté $\lambda_{\alpha_1}$ pour entrer dans la région $R_{\alpha_1}$, puis qu'il sorte de $R_{\alpha_1}$ par le côté correspondant à $\lambda_{\alpha_2}$ pour entrer dans la région $R_{\beta_2}$, qu'il sorte de $R_{\beta_2}$ par le côté correspondant à $\lambda_{\alpha_3}$ pour entrer dans $R_{\beta_3}$, etc. et enfin qu'il sorte de $R_{\beta_{\nu-1}}$ par le côté correspondant à $\lambda_{\alpha_\nu}$ pour entrer dans $R_{\beta_\nu}$; la substitution qui correspondra à cette région $R_{\beta_\nu}$ sera:




$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}( \ldots\ldots\ldots (f_{\alpha_{\nu-1}}(f_{\alpha_\nu}(z) \ldots\ldots\ldots)].$$

Dans cette expression $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_\nu$ désignent des indices qui peuvent être $1, 2, \ldots\ldots$ ou $2n$.

Donc toute substitution qui correspond à une région que l'on peut atteindre en partant de $R_0$ et en franchissant un nombre fini de côtés est une combinaison de $(z, f_1)$, $(z, f_2) \ldots\ldots (z, f_n)$. Nous laisserons de côté tous les groupes pour lesquels on ne pourrait pas passer d'une région à l'autre en franchissant un nombre fini de côtés. Alors toute substitution sera une combinaison de:

$$(z, f_1), \quad (z, f_2), \ldots\ldots\ldots (z, f_n). \tag{7}$$

Comment trouverons-nous les relations de la forme (6) qui auront lieu entre les fonctions $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$?

Pour cela il suffira évidemment de rechercher comment on peut exprimer par une combinaison des substitutions (7) la substitution:

$$(z, z) \text{ ou } (z, f_0(z))$$

qui correspond à $R_0$. On appliquera la règle exposée plus haut; c'est à

dire qu'on décrira un contour fermé quelconque $AMA$ passant par un point $A$ intérieur à $R_0$. Si ce contour traverse successivement des régions $R_0$, $R_{\alpha_1}$, $R_{\beta_2}$, ...... $R_{\beta_{\nu-1}}$, $R_{\beta_\nu} = R_0$ et en sort respectivement par les côtés $\lambda_{\alpha_1}$, $\lambda_{\alpha_2}$ ...... $\lambda_{\alpha_\nu}$, la substitution qui correspondra à $R_0$ sera:

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots\ldots(f_{\alpha_\nu}(z)\ldots\ldots)]$$

ce qui permettra d'écrire

$$z = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots\ldots(f_{\alpha_\nu}(z)\ldots\ldots).$$

De toutes les relations (6) ainsi obtenues, toutes ne sont pas fondamentales. Pour obtenir les relations fondamentales, il suffit de décrire des contours fermés infinitésimaux autour de chacun des sommets de $R_0$.

Puisqu'on trouve ainsi toutes les relations de la forme (6), les substitutions (7) sont généralement indépendantes et par conséquent forment un système de substitutions fondamentales du groupe envisagé.

On voit de plus que l'exposant d'une substitution $f_i$ est le nombre minimum de côtés qu'il faut franchir pour passer de $R_0$ dans la région qui correspond à la substitution $f_i$.

Outre les groupes fuchsiens ou groupes discontinus formés de substitutions réelles, j'ai été conduit à envisager les groupes discontinus formés de substitutions linéaires quelconques et que j'ai appelés groupes Kleinéens. Je n'en parlerai pas dans le présent travail, me réservant d'exposer dans un mémoire spécial les résultats que j'ai obtenus à leur égard.

## § 4. Polygones générateurs.

Les régions $R_i$ sont définies par la condition que chacune d'elles ne contient *qu'un seul* point correspondant à un point $z$ donné. Mais cette condition ne suffit pas pour les définir complètement. En effet si l'on se donne un groupe fuchsien $G$, il y aura une infinité de manières de subdiviser le plan de telle sorte que dans chaque région il n'y ait qu'un point correspondant à un point $z$ donné.

Au contraire si l'on se donne la décomposition du plan en une infinité de régions telles que $R$, le groupe $G$ sera parfaitement déterminé.

Donnons-nous un groupe $G$ et envisageons les diverses décompositions du plan en régions $R_0$ qui correspondent à ce groupe. Ces décompositions

sont en nombre infini. Comment de l'une d'elles pourrons-nous déduire toutes les autres? Soit $S_0$ une portion de la région $R_0$, $S_i$ la portion correspondante de la région $R_i$. Choisissons parmi les substitutions du groupe $G$ l'une quelconque d'entre elles:

$$(z, f_p(z)).$$

Soit $i_p$ l'indice de la substitution:

$$[z, f_p(f_i(z))]$$

de telle sorte que:

$$f_p[f_i(z)] = f_{i_p}(z).$$

Des diverses régions $R_i$ je retranche la portion $S_i$ et j'ajoute à ce qui reste la région $S_{i_p}$. J'obtiens ainsi une infinité de régions:

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i.$$

Ces régions $R'_i$ recouvriront la même partie du plan que les régions $R_i$ et ne la recouvriront qu'une fois. Chacune d'elles ne contiendra qu'un seul point correspondant à un point donné $z$. A la décomposition du plan en régions $R'_i$ correspondra donc le même groupe $G$ qu'à la décomposition en régions $R_i$. Si $S_0$ est contigu intérieurement à l'une des frontières de $R_0$ et si $S_p$ est contigu extérieurement à l'une des frontières de $R_0 - S_0$, la région $R'_0$ sera *d'une seule pièce et sans trou.* La plupart du temps, pour plus de commodité, nous choisirons la région $R'_0$ de telle sorte qu'elle soit d'une seule pièce et sans trou, mais cela n'a rien d'essentiel.

En opérant sur les régions $R'_i$ comme nous avons opéré sur les régions $R_i$, nous obtiendrons une nouvelle décomposition du plan en régions $R''_i$ qui correspondra toujours au groupe envisagé $G$. En continuant indéfiniment de la sorte, on obtiendra toutes les décompositions qui correspondent au groupe $G$.

On est conduit tout naturellement à la généralisation suivante:

Jusqu'ici j'ai supposé que la région $S_0$ était tout entière intérieure à la région $R_0$ et par conséquent $S_i$ à la région $R_i$, et de fait, sans cette hypothèse, on ne saurait ce qu'on doit entendre par la région:

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i$$

à moins toutefois que l'on ne fasse une convention spéciale.

On est conduit ainsi à envisager des régions divisées en deux parties dont l'une est considérée comme positive et l'autre comme négative.

Ainsi si $S_i$ ne fait pas partie de $R_i$, on considérera la région $R'_i$ comme formée d'une partie positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une partie négative $S_i$. Cet ordre de considérations n'est pas d'ailleurs absolument nouveau.

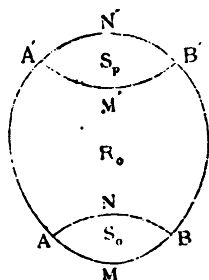
Si l'on envisage un quadrilatère *ABCD* dont deux côtés opposés *AB* et *CD* se coupent en un point *M*, ce quadrilatère, formé de deux triangles *ADM* et *BCM* opposés par le sommet, s'appelle un quadrilatère concave.

Les formules qui donnent l'aire d'un quadrilatère convexe s'appliquent à une pareille figure pourvu que l'on regarde l'aire de cette figure comme la différence et non comme la somme des aires des deux triangles *ADM* et *BCM*. Dans un quadrilatère concave l'un des deux triangles doit donc être regardé comme positif et l'autre comme négatif. Il se passe ici quelque chose d'analogue. Une région *concave* $R'_i$ sera formée d'une portion positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une portion négative $S_i$. Le nombre des points correspondants à un même point donné $z$, compris dans la partie positive de $R'_i$, est toujours fini et il surpasse d'une unité le nombre des points correspondants à $z$ compris dans la partie négative.

Nous ferons peu d'usage de cette subdivision du plan en régions $R_i$ concaves, parce que la subdivision en régions convexes est infiniment plus commode, mais elle pourra nous servir comme d'intermédiaire pour passer d'une subdivision convexe à une autre subdivision également convexe.

Puisqu'il y a une infinité de manières de subdiviser le plan en régions $R_i$ convexes, nous devons choisir parmi ces diverses manières la plus simple et la plus commode.

Voici comment nous pourrons procéder: Nous déterminerons une région $S_0$, et la région $S_p$ transformée de $S_0$ par la substitution $f_p(z)$. Nous ajouterons $S_p$ à $R_0$ et nous en retrancherons $S_0$. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région $R'_0$ qui pourra servir de base à une nouvelle subdivision du plan en régions $R'_i$ correspondant au groupe $G$. Car pour obtenir la région $R'_i$ il suffira de retrancher de $R_i$ la région $S_i$ transformée de $S_0$ par $f_i(z)$ et d'y ajouter la région $S_{i_p}$ transformée de $S_p$ par $f_i(z)$. Comment maintenant conviendra-t-il de choisir les régions $S_0$ et $S_p$?



Soit $AMB$ un côté de $R_0$, $A'M'B'$ le côté conjugué. Ces deux côtés sont congruents et la substitution réelle qui change $AMB$ en $A'M'B'$ est une substitution $f_p(z)$ du groupe $G$. Joignons les points $A$ et $B$ par un arc de cercle $ANB$ ayant son centre sur $X$. La région $S_0$ sera la région $AMBNA$ comprise entre l'arc de courbe $AMB$ et l'arc de cercle $ANB$. Le transformé de $ANB$ par $f_p(z)$ sera un arc de cercle $A'N'B'$ ayant son centre sur $X$, et la transformée $S_p$ de $S_0$ sera la région $A'M'B'N'A'$. Si nous ajoutons $S_p$ à $R_0$ et que nous en retranchions $S_0$, nous obtiendrons une région $R_0'$ analogue à $R_0$ mais où les côtés conjugués $AMB$, $A'M'B'$ seront devenus des arcs de cercle $ANB$, $A'N'B'$ ayant leurs centres sur $X$.

En opérant de même manière sur chaque paire de côtés conjugués de la 1[ère] sorte, on réduira tous ces côtés à des arcs de cercle ayant leurs centres sur $X$. On peut donc toujours supposer que la région $R_0$ est un polygone dont les côtés sont de deux sortes, les uns sont des arcs de cercle ayant leurs centres sur $X$, les autres sont des segments de cet axe $X$ lui-même. Un pareil polygone s'appellera *polygone normal*.

Mais une difficulté spéciale peut se présenter dans certains cas.

En effet nous ne nous sommes pas inquiétés de savoir si la région:

$$S_0 = AMBNA$$

faisait tout entière partie de $R_0$. Il pourra donc se faire que le polygone normal auquel on aura réduit la région $R_0$ soit concave.

Voici comment on se tirerait d'affaire en pareil cas. Il est clair que la partie positive et la partie négative de $R_0$ devront être toutes deux des polygones normaux. Supposons pour fixer les idées que la partie positive contienne au plus deux points correspondants à un point donné $z$. Parmi les points de $R_0$, il y en aura qui seront compris dans la partie positive et qui n'admettront aucun correspondant soit dans la partie positive, soit dans la partie négative. Ils formeront un certain polygone normal $P$.

La partie négative formera un certain polygone normal $P'$; et à chaque point de cette partie négative correspondront deux points de la partie positive dont l'ensemble formera deux polygones normaux $P''$ et $P'''$, tous deux congruents à $P'$. Cela posé, retranchons de $R_0$ le polygone $P''$ et ajoutons-y le polygone congruent $P'$. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région $R_0'$ qui pourra servir comme $R_0$ à engendrer le groupe

fuchsien $G$. Cette région n'aura plus de partie négative et sera formée des deux polygones $P$ et $P'''$.

Ce sera donc un *polygone normal convexe.*

*On voit ainsi que dans tous les cas possibles, on peut supposer que $R_0$ est un polygone normal convexe.*

Si l'on connait le polygone normal $R_0$ et la distribution de ses côtés en paires de côtés conjugués, le groupe $G$ est entièrement déterminé.

En effet reportons-nous à ce que nous avons vu dans le § précédent:

Les substitutions fondamentales de $G$ sont celles qui correspondent aux régions limitrophes de $R_0$; on les obtiendra donc en envisageant un des côtés de la 1ère sorte de $R_0$ et en cherchant quelle est la substitution qui change ce côté en son conjugué. Or soient $AB$ et $A'B'$ deux côtés conjugués. Ces deux côtés, d'après le § 3, devront être congruents, c'est à dire que l'on aura:

$$(A, B) = (A', B').$$

Or dans ce cas, d'après le § 1, il existe une substitution réelle qui change $AB$ en $A'B'$ et en général cette substitution est parfaitement déterminée. Les substitutions fondamentales du groupe $G$ et par conséquent le groupe $G$ lui-même sont donc parfaitement déterminés.

C'est pour cette raison que j'appellerai le polygone $R_0$ *polygone générateur* du groupe $G$.

## § 5. Classification en familles.

Nous avons vu plus haut que deux, trois ou plusieurs des sommets du polygone $R_0$ peuvent être des points correspondants et nous avons appelé cycle l'ensemble des sommets de ce polygone qui sont correspondants à l'un d'entre eux.

Les sommets de $R_0$ se répartissent de la sorte en un certain nombre de cycles. Voyons comment, connaissant la distribution en paires des côtés de la 1ère sorte, on pourra trouver la distribution des sommets en cycles. Pour cela il suffit d'appliquer la règle suivante que l'on démontrerait sans peine.

Supposons qu'on parcoure dans un certain sens le périmètre du polygone $R_0$, et qu'on rencontre successivement un côté, puis un sommet,

puis un autre côté, puis un autre sommet et ainsi de suite. Cela posé, partons d'un sommet quelconque; envisageons le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la 1ère sorte; puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la 1ère sorte, et ainsi de suite. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on revienne au sommet qui a servi de point de départ, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive à un côté de la 2de sorte.

Dans le premier cas, tous les sommets que l'on aura rencontrés de la sorte formeront un cycle. Dans le second cas, il sera nécessaire pour compléter le cycle de reprendre le sommet qui a servi de point de départ et de remonter à partir de ce sommet, en considérant successivement le côté précédent, puis son conjugué si ce côté est de la 1ère sorte, puis le sommet précédent, puis le côté précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on finisse par arriver à un côté de la 2de sorte.

Il est aisé de voir qu'il y a trois catégories de cycles: Tout point correspondant d'un point $z$ situé au dessus de $X$ est lui-même au dessus de $X$, donc tout sommet correspondant d'un sommet de la 1ère catégorie (§ 3) est lui-même de la 1ère catégorie. Il y aura donc des cycles formés uniquement de sommets de la 1ère catégorie; ce seront les *cycles de la 1ère catégorie.* En partant d'un sommet de la 1ère catégorie et prenant successivement les côtés et les sommets que l'on rencontre en appliquant la règle précédente, on ne rencontrera jamais que des sommets de la 1ère catégorie et par conséquent aussi jamais que des côtés de la 1ère sorte. On ne sera donc arrêté que quand on sera revenu au sommet qui aura servi de point de départ, c'est à dire que le cycle sera *fermé.*

Tout sommet correspondant d'un sommet de la 2de ou de la 3me catégories, devra lui-même appartenir à l'une des deux catégories. Ce qui nous amène à considérer deux nouvelles classes de cycles.

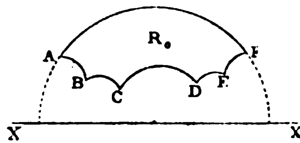
Les *cycles de la 2de catégorie* ne contiendront que des sommets de la 2de catégorie; en leur appliquant la règle précédente, on ne rencontrera pas de côté de la 2de sorte, c'est à dire que le cycle sera encore *fermé.*

Les *cycles de la 3me catégorie* contiendront des sommets de la 3me catégorie et pourront en contenir également de la 2de; en leur appliquant la règle précédente, on rencontrera des côtés de la 2de sorte, c'est à dire que le cycle sera *ouvert.* Cela va nous permettre de classer en familles les polygones $R_0$ et par conséquent les groupes $G$.

Le polygone $R_0$ sera

de la $1^{\text{ère}}$ famille s'il a des cycles de la $1^{\text{ère}}$ catégorie seulement
» » $2^{\text{me}}$ » » » » » » » $2^{\text{me}}$ » »
» » $3^{\text{me}}$ » » » » » » » $3^{\text{me}}$ » »
» » $4^{\text{me}}$ » » » » » » » $2^{\text{me}}$ et de la $3^{\text{me}}$ catégorie seulement
» » $5^{\text{me}}$ » » » » » » » $1^{\text{ère}}$ » » » $3^{\text{me}}$ » »
» » $6^{\text{me}}$ » » » » » » » $1^{\text{ère}}$ » » » $2^{\text{me}}$ » »
» » $7^{\text{me}}$ » » » » » des trois catégories.

Quelques exemples feront mieux comprendre ma pensée.




Exemple I. Le polygone $R_0$ est un hexagone $ABCDEF$; tous les côtés sont de la $1^{\text{ère}}$ sorte; les côtés

$AB$ et $AF$
$BC$ et $FE$
$CD$ et $ED$

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement:

1° en partant du sommet $A$, le sommet $A$, le côté $AB$, le côté $AF$ et le sommet $A$.

2° en partant de $B$, le sommet $B$, puis $BC$, puis $EF$, puis $F$, puis $FA$, puis $AB$, puis $B$.

3° en partant de $C$, le sommet $C$, puis $CD$, puis $ED$, puis $E$, puis $EF$, puis $BC$, puis $C$.

4° en partant de $D$, le sommet $D$, puis $DE$, puis $CD$, puis $D$.

Il y a donc quatre cycles formés respectivement:

1° du sommet $A$
2° des sommets $B$ et $F$
3° des sommets $C$ et $E$
4° du sommet $D$.

Exemple II. Le polygone $R_0$ est toujours un hexagone $ABCDEF$ dont tous les côtés sont de la $1^{\text{ère}}$ sorte; mais les côtés opposés

$AB$ et $DE$
$BC$ et $EF$
$CD$ et $FA$

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement

1° en partant de $A$, le sommet $A$, puis $AB$, puis $DE$, puis $E$, puis $EF$, puis $BC$, puis $C$, puis $CD$, puis $FA$, puis $A$.

2° en partant de $B$, le sommet $B$, puis $BC$, puis $EF$, puis $F$, puis $FA$, puis $CD$, puis $D$, puis $DE$, puis $AB$, puis $B$.

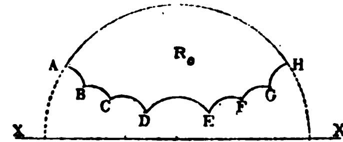
Il y a donc deux cycles formés respectivement:

1° des sommets $A$,$C$ et $E$

2° des sommets $B$,$D$ et $F$.

Exemple III. Le polygone $R_0$ est un octogone $ABCDEFGH$ dont tous les côtés sont de la 1ère sorte, les côtés opposés:

$AB$ et $EF$
$BC$ et $FG$
$CD$ et $GH$
$DE$ et $HA$




sont conjugués.

Partons du sommet $A$, nous rencontrerons successivement: $A$, $AB$, $EF$, $F$, $FG$, $BC$, $C$, $CD$, $GH$, $H$, $HA$, $DE$, $E$, $EF$, $AB$, $B$, $BC$, $FG$, $G$, $GH$, $CD$, $D$, $DE$, $HA$, $A$.

Tous les sommets font donc partie d'un même cycle.

Exemple IV. Supposons maintenant que les côtés:

$AB$ et $CD$
$BC$ et $DE$
$EF$ et $GH$
$FG$ et $HA$

soient conjugués.

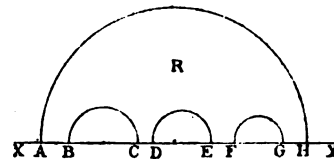
Partons encore de $A$, nous rencontrerons:

$A$, $AB$, $CD$, $D$, $DE$, $BC$, $C$, $CD$, $AB$, $B$, $BC$, $DE$, $E$, $EF$, $GH$, $H$, $HA$, $FG$, $G$, $GH$, $EF$, $F$, $FG$, $HA$, $A$.

Tous les sommets font encore partie d'un même cycle.

Dans les quatre exemples précédents, tous les côtés sont de la 1ère sorte, tous les cycles sont donc de la 1ère ou de la 2de catégories.

Exemple V. Le polygone $R_0$ est encore un octogone $ABCDEFGH$.




Les côtés $AB$, $CD$, $EF$, $GH$ sont de la 1ère sorte, les côtés $BC$, $DE$, $FG$, $HA$ sont de la 2de sorte. Les côtés:

$$AB \text{ et } CD$$
$$EF \text{ et } GH$$

sont conjugués. On rencontrera successivement:

1° en partant de $A$, le côté $AB$, puis $CD$, puis $D$, puis $DE$ qui est de la 2^de^ sorte.

2° en partant de $C$, le côté $CD$, puis $AB$, puis $B$, puis $BC$ qui est de la 2^de^ sorte.

3° en partant de $E$, le côté $EF$, puis $GH$, puis $H$, puis $HA$ qui est de la 2^de^ sorte.

4° en partant de $G$, le côté $GH$; puis $EF$, puis $F$, puis $FG$ qui est de la 2^de^ sorte.

Les sommets se répartissent donc en 4 cycles formés respectivement:

1° de $A$ et de $D$, 2° de $C$ et de $B$, 3° de $E$ et de $H$, 4° de $G$ et de $F$.

Ces cycles sont *ouverts,* puisque dans la recherche de chacun d'eux on a été arrêté par la rencontre d'un côté de la 2^de^ sorte. Ils sont donc de la 3^me^ catégorie.

On peut pousser plus loin encore la classification des polygones $R_0$ et des groupes $G$. Voici de quelles considérations nous pourrons faire usage à cet effet.

Considérons d'abord un cycle de la 1^ère^ catégorie et un sommet $A_0$ de $R_0$ faisant partie de ce cycle. Soit $B_1$ le côté suivant, $C_1$ son conjugué, $A_1$ le sommet suivant, $B_2$ le côté suivant, $C_2$ son conjugué, $A_2$ le sommet suivant et ainsi de suite, on poursuivra de la sorte jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet $A_n$ coïncidant avec $A_0$.

On pourra même poursuivre indéfiniment de cette façon sans être jamais arrêté puisque l'on ne rencontrera pas de côté de la 2^de^ sorte. Mais le sommet $A_n$ ne différera pas de $A_0$, le sommet $A_{n+1}$ de $A_1$, et en général le sommet $A_h$ de $A_k$ si on a

$$h \equiv k \text{ mod. } n.$$

Le cycle se compose alors de $n$ sommets distincts, à savoir $A_0$, $A_1$, . . . . . . . . . $A_{n-1}$.

Supposons maintenant que l'on décrive autour de $A_0$ un cycle infiniment petit quelconque; on sortira de $R_0$ par le côté $B_1$, pour entrer dans le polygone $R_1$. Considéré comme appartenant à ce dernier polygone, le côté $B_1$ sera l'homologue de $C_1$; par conséquent le point $A_0$ sera l'ho-

mologue de $A_1$ et le côté suivant sera l'homologue de $B_2$. Le cycle infiniment petit décrit autour de $A_0$ sortira ensuite du polygone $R_1$ en franchissant ce côté homologue de $B_2$ et entrera dans un certain polygone que j'appelle $R_2$. Considéré comme appartenant à ce polygone, le côté qui dans $R_1$ était homologue de $B_2$ sera homologue de $C_2$; le point $A_0$ sera homologue de $A_2$ et le côté suivant l'homologue de $B_3$.

On continuera de la sorte, la loi est manifeste. On passera successivement dans les polygones $R_0$, $R_1$, $R_2$ ...... $R_{q-1}$ et enfin dans $R_q$ qui devra se confondre avec $R_0$.

On sortira du polygone $R_k$ pour entrer dans le polygone $R_{k+1}$ en franchissant un côté qui envisagé comme appartenant à $R_k$ sera l'homologue de $B_{k+1}$ et envisagé comme appartenant à $R_{k+1}$ sera l'homologue de $C_{k+1}$. Le sommet $A_0$ envisagé comme appartenant à $R_k$ sera l'homologue de $A_k$.

Mais le polygone $R_q$ doit se confondre avec $R_0$; donc le sommet $A_q$ ne doit pas différer de $A_0$, on a donc

$$q \equiv 0 \text{ mod. } n$$

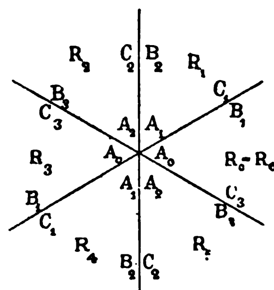
d'où:

$$q = pn.$$

Le nombre des polygones qui ont un sommet en $A_0$ sera donc divisible par $n$.

La figure ci-jointe éclaircira peut-être ce qui précède. Nous y avons supposé

$$n = 3, \quad p = 2.$$




Nous n'avons représenté que les parties des polygones qui sont infiniment voisines de $A_0$; c'est pourquoi chacun de ces polygones est représenté seulement par un angle. Dans le voisinage de chaque sommet $A$ (ou de chaque côté $B$ ou $C$) et à l'intérieur de chaque polygone $R_i$, nous avons marqué une lettre indiquant quel est le sommet (ou le côté) de $R_0$ dont ce sommet $A$ (ou ce côté $B$ ou $C$) est l'homologue si on l'envisage comme faisant partie du polygone $R_i$.

Nous avons donc autour du point $A_0$ $pn$ angles dont la somme doit être égale à $2\pi$, et comme dans deux polygones congruents les angles homologues sont égaux, on aura:

Or on a:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots\dots\dots + A_{q-1} = 2\pi.$$

$$A_{kn} + A_{kn+1} + A_{kn+2} + \dots\dots + A_{kn+n-1} = A_0 + A_1 + \dots\dots + A_{n-1}.$$

Il vient donc:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots\dots + A_{n-1} = \frac{2\pi}{p}$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant:

*La somme des angles de $R_0$ qui correspondent aux sommets d'un même cycle de la 1ère catégorie est une partie aliquote de $2\pi$.*

Mais ici deux cas peuvent se présenter: ou bien la somme de ces angles sera égale à $2\pi$, ou bien à $2\pi$ divisé par un nombre entier plus grand que 1.

Dans le premier cas je dirai que le cycle appartient à la 1ère sous-catégorie; dans le second cas, qu'il appartient à la 2e sous-catégorie.

Les propriétés des cycles de ces deux sous-catégories ne sont pas tout à fait les mêmes; c'est ce qui nous engage à faire dans la 1ère famille une coupure, et à séparer, sous le nom de 1er ordre, les polygones $R_0$ dont tous les cycles sont de la 1ère sous-catégorie, pendant que les autres polygones $R_0$ qui auront un cycle de la 2de sous-catégorie formeront le 2e ordre.

Reprenons les polygones $R_0, R_1, \dots\dots R_{q-1}$ qui ont un sommet en $A_0$.

Envisageons la substitution réelle qui change $R_0$ en $R_n$ et qui fait évidemment partie du groupe $G$. Cette substitution ne changera pas le point $A_0$ qui devra par conséquent en être un point double. C'est donc une substitution elliptique; elle pourra se mettre sous la forme (3) § 1 et de telle sorte que

$$K = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Supposons maintenant que le point $A_0$ au lieu d'appartenir à un cycle de la 1ère catégorie, appartienne à un cycle de la 2e catégorie. Tous les raisonnements précédents s'appliqueront, puisque nous n'avons supposé qu'une chose: c'est que le cycle était fermé, et puisque cela est vrai des cycles de la 2de comme de ceux de la 1ère catégorie. Seulement le nombre $q$ et par conséquent le nombre $p$ seront infinis. La somme des angles correspondant aux divers sommets du cycle sera donc nulle et c'est ce qu'il était

aisé de prévoir, puisque tout angle d'un polygone normal dont le sommet est sur $X$ est évidemment nul. La substitution réelle qui change $R_0$ en $R_n$ ne changera pas $A_0$. Ce sommet en sera donc un point double, et comme il est sur $X$, la substitution sera parabolique ou hyperbolique.

Soit $S$ cette substitution; soit $C_k$ le côté qu'il faut franchir pour passer de $R_k$ dans $R_{k+1}$. $C_{k+n}$ sera le transformé de $C_k$ par $S$, de sorte que les divers côtés $C_k$ seront les transformés successifs de $C_0$, $C_1$, ..... $C_{n-1}$ par la substitution $S$ et la substitution inverse.

Supposons d'abord que la substitution $S$ soit parabolique. Nous avons vu (§ 1) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas $X$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini de transformés successifs d'un cercle tel que $C_0$ par une substitution telle que $S$ et par sa substitution inverse. Un pareil arc ne passera donc qu'à travers un nombre fini des polygones $R_0$, $R_1$, ...... $R_q$ ...... qui ont un sommet en $A_0$.

Supposons au contraire que la substitution $S$ soit hyperbolique. Soient $A_0$ et $A_0'$ les deux points doubles de cette substitution, $C$ le cercle décrit sur $A_0 A_0'$ comme diamètre. Nous avons vu (§ 1) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas $X$ rencontre un nombre infini de transformés successifs d'un cercle tel que $C_0$ ou n'en rencontre qu'un nombre fini, suivant qu'il coupe ou ne coupe pas le cercle $C$. Un pareil arc traversera donc un nombre infini des polygones $R_0$, $R_1$, ...... $R_q$, ...... s'il coupe $C$, et il n'en traversera qu'un nombre fini s'il ne coupe pas $C$. Si la substitution $S$ est paraboliqne, nous dirons que le cycle auquel appartient $A_0$ est de la 3^me^ sous-catégorie; si elle est hyperbolique, nous dirons que le cycle est de la 4^e^ sous-catégorie.

Cela va nous permettre de subdiviser les 2^e^, 4^e^, 6^e^, 7^e^ familles.

Un groupe de l'une de ces familles appartiendra au 1^er^ ordre de cette famille s'il ne contient pas de cycle de la 4^e^ sous-catégorie, et au 2^d^ ordre s'il contient des cycles de la 4^e^ sous-catégorie.

## § 6. Existence des groupes fuchsiens.

Jusqu'ici nous avons raisonné sur les groupes fuchsiens en supposant qu'ils existaient et nous n'en avons pas démontré l'existence. Nous avons vu que tout groupe fuchsien $G$ peut être considéré comme engendré par un polygone normal $R_0$ dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la

1ère sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur $X$, ceux de la 2de sorte sont des segments de l'axe $X$ lui-même. Les côtés de la 1ère sorte sont au nombre de $2n$ et se répartissent en paires de côtés conjugués. Quand on connait le polygone $R_0$ et la répartition de ses côtés en paires, le groupe $G$ correspondant est en général parfaitement déterminé. Quant aux sommets, ils se répartissent en un certain nombre de cycles.

Pour pouvoir donner naissance à un groupe fuchsien $G$, le polygone $R_0$ doit satisfaire à deux conditions:

1° *Deux côtés conjugués doivent être congruents.*

2° *La somme des angles d'un même cycle de la 1ère catégorie doit être une partie aliquote de $2\pi$.*

Ces conditions sont nécessaires; sont elles suffisantes? C'est ce que je vais démontrer.

Je suppose que le polygone $R_0$ soit donné, ainsi que la distribution de ses côtés de la 1ère sorte. De cette connaissance résulte celle des substitutions fondamentales du groupe correspondant et par conséquent la possibilité de construire les polygones $R$ limitrophes de $R_0$. Opérant sur ceux-ci comme on a opéré sur $R_0$, on construira les polygones limitrophes des polygones déjà obtenus et continuant indéfiniment cette opération, on construira une infinité de polygones congruents à $R_0$. Mais ici plusieurs hypothèses peuvent être faites:

1° Ou bien les polygones ainsi construits couvriront une partie du plan mais ne la couvriront qu'une fois de manière à ne pas empiéter les uns sur les autres et à ne pas se recouvrir mutuellement. Alors ils formeront une sorte de damier; la portion du plan envisagée sera partagée en un certain nombre de régions congruentes entre elles. *L'existence du groupe fuchsien correspondant à $R_0$ sera donc démontrée.*

2° Ou bien les polygones construits de la sorte empièteront les uns sur les autres de façon à recouvrir une partie du plan plusieurs fois ou même une infinité de fois. Dans ce cas le groupe auquel conduirait $R_0$ (c'est à dire le groupe dont les substitutions fondamentales sont celles qui changent chaque côté de la 1ère sorte de $R_0$ en son conjugué) est continu; ce n'est pas un groupe fuchsien.

Comment reconnaîtrons-nous maintenant quel est celui de ces deux cas auquel nous avons affaire? Considérons un point quelconque $A$, intérieur à $R_0$, et un second point $B$ quelconque. Joignons $A$ à $B$ par un

arc de courbe quelconque *AMB*. Cet arc sortira de $R_0$ par un certain côté $C_0$; on construira alors le polygone $R_1$, limitrophe de $R_0$ le long de $C_0$; si *AMB* sort de $R_1$ par un côté $C_1$, on construira le polygone $R_2$, limitrophe de $R_1$ le long de $C_1$ et ainsi de suite.

Les arcs *AMB* seront de deux sortes:

1° Ou bien après un nombre fini d'opérations de ce genre on finira par trouver un polygone $R_n$ duquel ne sorte plus l'arc *AMB*, de telle façon que le point *B* soit à l'intérieur de $R_n$; c'est alors que le point *B* se trouve dans la partie du plan recouverte par les polygones *R* et que l'arc *AMB* ne sort pas de cette partie du plan: l'arc *AMB* sera *de la 1ère sorte.*

2° Ou bien, quelque grand que soit le nombre des opérations effectuées, on ne trouvera jamais un polygone $R_n$ duquel ne sorte plus l'arc *AMB*. L'arc *AMB* sera alors *de la 2e sorte.*

Au sujet du point *B* on peut faire trois hypothèses:

1° Tous les arcs *AMB* que l'on peut tracer entre *A* et *B* sont de la 2e sorte; le point *B* est alors hors de la partie du plan recouverte par les polygones *R*.

2° Parmi les arcs *AMB* tracés entre *A* et *B*, il y en a de la 1ère sorte; chacun de ces arcs conduit, d'après ce qui précède, à un polygone $R_n$ à l'intérieur duquel se trouve *B*. De plus ce polygone $R_n$ est *le même* quel que soit l'arc *AMB* de la 1ère sorte par lequel on a joint les deux points *A* et *B*. Dans ce cas le point *B* est dans la partie du plan recouverte par les polygones *R*; de plus ces polygones ne recouvrent cette partie du plan qu'une seule fois et l'existence du groupe fuchsien correspondant à $R_0$ est démontrée.

3° Parmi les arcs *AMB* tracés entre *A* et *B* il y en a de la 1ère sorte, chacun d'eux conduit à un polygone $R_n$ à l'intérieur duquel se trouve *B*; mais ce polygone change quand on change l'arc *AMB*. Dans ce cas le point *B* est dans la partie du plan recouverte par les polygones *R*; mais ces polygones recouvrent cette partie du plan plus d'une fois de telle sorte qu'il n'y a pas de groupe fuchsien correspondant à $R_0$.

Nous sommes donc conduits à la règle suivante.

Il faut joindre deux points *A* et *B* par deux arcs *AMB*, *ANB* de la 1ère sorte et rechercher si ces deux arcs conduisent à un même polygone $R_n$.

Mais nous pouvons la modifier de la manière suivante: On trace un

contour fermé $AMA$, dont le point initial et final $A$ est intérieur à $R_0$; si cet arc $AMA$ sort de $R_0$ par un côté $C_0$, on construira le polygone $R_1$, limitrophe de $R_0$ le long de $C_0$; s'il sort de $R_1$ par un côté $C_1$, on construira le polygone $R_2$, limitrophe de $R_1$ le long de $C_1$ et ainsi de suite. Je suppose de plus que l'arc $AMA$ soit de la 1ère sorte, c'est à dire qu'on l'ait choisi de telle manière qu'après un nombre fini d'opérations, on arrive à un polygone $R_n$ d'où ne sorte plus l'arc $AMA$. *Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que, quel que soit le contour $AMA$ de la 1ère sorte, le polygone $R_n$ soit précisément $R_0$.*

Supposons d'abord que le polygone $R_0$ envisagé n'admette pas de cycle de la 4e sous-catégorie.

Dans ce cas j'énoncerai les théorèmes suivants:

I. *Tout arc de courbe $AMB$ qui coupe $X$ est de la 2e sorte.* En effet le polygone $R_0$ est tout entier au-dessus de $X$ et il en est par conséquent de même de tous les polygones $R$ qui lui sont congruents. Supposons qu'on construise les polygones $R_1$, $R_2$, etc. $R_n$ comme il a été dit plus haut. Ils seront tous dans la partie du plan située au dessus de $X$ et comme l'arc $AMB$ doit sortir de cette partie du plan, il devra sortir de $R_n$ quelque grand que soit $n$. C. Q. F. D.

II. *Tout arc $AMB$ qui ne coupe pas $X$ est de la 1ère sorte.* En effet je construis comme il a été dit plus haut les polygones

$$R_1, R_2, \ldots\ldots R_p \ldots\ldots$$

et j'appelle $\lambda_p$ la portion de l'arc $AMB$ qui est à l'intérieur du polygone $R_p$. L'arc $AMB$ va se trouver décomposé en une série d'arcs $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots\ldots$ correspondant à la série des polygones $R_0$, $R_1$, $R_2, \ldots\ldots$ Le nombre de ces arcs (qui est celui des polygones correspondants) sera fini si $AMB$ est de la 1ère sorte (ce que nous nous proposons de démontrer) et infini dans le cas contraire.

L'arc $\lambda_p$ joindra évidemment deux côtés de la 1ère sorte du polygone $R_p$, car il ne doit pas couper $X$ et ne peut par conséquent aboutir à un côté de la 2e sorte puisque ces côtés sont des segments de $X$. On peut d'ailleurs faire deux hypothèses:

1° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc $\lambda_p$ sont deux côtés consécutifs du polygone $R_p$ séparés seulement par un

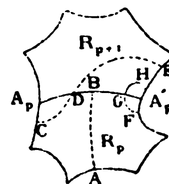
sommet $A_p$ de ce polygone. Je dirai que $\lambda_p$ est de la 1ère espèce et qu'il sous-tend le sommet $A_p$. Exemples, les arcs $CD$ et $FG$ de la figure en bas.

2° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc $\lambda_p$ ne sont pas consécutifs, et dans ce cas je dirai que $\lambda_p$ est de la 2e espèce. Exemple, l'arc $AB$ de la figure. Le polygone $R_p$ étant congruent à $R_0$, l'arc $\lambda_p$ sera congruent à un certain arc $\lambda$ joignant deux points du périmètre de $R_0$ appartenant à deux côtés non consécutifs. Il est clair que la distance de ces deux points ne pourra être infiniment petite et que par conséquent la $L$ (voir § 1) de cet arc $\lambda$ ne sera pas non plus infiniment petite, mais sera plus grande qu'une certaine quantité donnée $K$. La $L$ de l'arc $\lambda_p$ sera la même que celle de l'arc congruent $\lambda$; elle sera donc plus grande que $K$.

Soit $L_0$ la $L$ de l'arc $AMB$; elle est finie parce que cet arc ne coupe pas $X$. Le nombre des arcs $\lambda_p$ de la seconde espèce sera donc plus petit que $\frac{L_0}{K}$, et par conséquent *limité*.

On pourra donc prendre $q$ assez grand pour que les arcs $\lambda_{q+1}$, $\lambda_{q+2}, \ldots\ldots$ et en général les arcs $\lambda_p$ où $p > q$ soient tous de la 1ère espèce; il reste à démontrer que le nombre de ces arcs $\lambda_p$ $(p > q)$ est fini.

J'envisage deux arcs consécutifs $\lambda_p$ et $\lambda_{p+1}$ et l'arc $\mu_p = \lambda_p + \lambda_{p+1}$ formé par leur réunion; je dirai que l'arc $\mu_p$ est de la 1ère catégorie si les arcs $\lambda_p$ et $\lambda_{p+1}$ sous-tendent un même sommet, et de la 2e catégorie dans le cas contraire. Ainsi l'arc $CE$ de la figure sera de la 2e catégorie et l'arc $FH$ de la première, parce que l'arc $CD$ sous-tend le sommet $A_p$ pendant que les arcs $FG$, $GH$ et $DE$ sous-tendent le sommet $A'_p$.




Envisageons un arc $\mu_p$ de la 2e catégorie: il aboutira à deux côtés de la 1ère sorte appartenant l'un à $R_p$, l'autre à $R_{p+1}$ et il traversera le côté $C_p$ qui sert de frontière commune à ces deux polygones; d'ailleurs ces trois côtés n'ont aucun point commun.

Le polygone $R_p$ étant congruent à $R_0$, le côté $C_p$ sera congruent à un des côtés $H$ de $R_0$. Soit $R'$ celui des polygones $R$ qui est limitrophe de $R_0$ le long de $H$; l'arc $\mu_p$ sera congruent d'un certain arc $\mu$ dont l'une des extrémités sera sur un des côtés $B$ de $R_0$ et l'autre sera sur un des côtés $B'$ de $R'$; cet arc traversera le côté $H$. D'ailleurs les trois côtés $B$, $H$ et $B'$ n'auront aucun point commun.

Dans ces conditions il est clair que la $L$ de l'arc $\mu$ et par conséquent celle de $\mu_p$ n'est pas infiniment petite et est plus grande qu'une quantité fixe $K$. Il suit de là, comme plus haut, que le nombre des arcs $\mu_p$ de la 2$^{me}$ catégorie est *limité* et qu'on pourra prendre $q$ assez grand pour que tous les arcs $\mu_{q+1}$, $\mu_{q+2}$, ...... et en général $\mu_p$ $(p > q)$ soient tous de la 1$^{ère}$ catégorie; en d'autres termes tous les arcs $\lambda_{q+1}$, $\lambda_{q+2}$ etc. et en général tous les arcs $\lambda_p$ $(p > q)$ sous-tendront un même sommet $D$.

Il reste à démontrer que le nombre de ces arcs $\lambda_p$ sous-tendant le sommet $D$ est fini. Nous pouvons faire deux hypothèses:

1° Ou bien $D$ appartient à un cycle de la 1$^{ère}$ ou de la 3$^{me}$ catégorie, et alors ce sommet n'appartient qu'à un nombre fini de polygones $R$, et par conséquent le nombre des arcs $\lambda_p$ est nécessairement fini.

2° Ou bien $D$ appartient à un cycle de la 2$^{de}$ catégorie, c'est à dire de la 3$^{me}$ sous-catégorie, puisque nous avons supposé que le polygone $R_0$ n'admettait pas de cycles de la 4$^{me}$ sous-catégorie. Nous avons vu (§ 5) qu'un arc de courbe ne coupant pas $X$ ne pouvait traverser qu'un nombre fini des polygones auxquels appartient le sommet $D$. Il suit de là que le nombre des arcs $\lambda_p$ est fini.

Donc dans tous les cas, le nombre des arcs $\lambda_p$ est fini; donc l'arc $AMB$ est de la 1$^{ère}$ sorte. C. Q. F. D.

*Donc la partie du plan recouverte par les polygones $R$ est la partie située au-dessus de $X$.*

Considérons maintenant un contour fermé $AMA$ de la 1$^{ère}$ sorte, c'est à dire ne coupant pas $X$; appliquons lui la règle exposée plus haut et supposons qu'en le parcourant on rencontre successivement les polygones $R_0$, $R_1$, ...... pour arriver au polygone $R_n$ quand on sera de retour au point $A$. Si le polygone $R_n$ est précisément $R_0$, je dirai que $AMA$ est de la 1$^{ère}$ espèce et, dans le cas contraire, qu'il est de la 2$^{de}$ espèce. Pour que le groupe fuchsien existe il faut et il suffit que tous les contours $AMA$ de la 1$^{ère}$ sorte soient de la 1$^{ère}$ espèce. A ce sujet je démontrerai successivement les théorèmes suivants:

III. *Si le contour $AMA$ se compose 1° d'un arc de courbe $AMB$, 2° d'un contour fermé infiniment petit $BNB$, 3° de l'arc $AMB$ parcouru en sens contraire, il est de la 1$^{ère}$ espèce.*

En effet construisons successivement, d'après la règle exposée plus haut, les polygones $R_0$, $R_1$, $R_2$ ...... $R_m$ que l'on rencontre en parcourant l'arc

*AMB*. Parcourons ensuite le contour infiniment petit *BNB*. On peut faire au sujet de ce contour trois hypothèses:

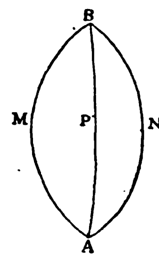
1° Ou bien *BNB* reste tout entier à l'intérieur du polygone $R_m$ et alors parcourant ce contour on ne sortira pas de ce polygone.

2° Ou bien *BNB* franchit un des côtés $C_m$ de $R_m$ mais sans envelopper un des sommets de ce polygone. Alors en suivant le contour, on sortira d'abord de $R_m$ en franchissant le côté $C_m$ pour entrer dans un nouveau polygone $R_{m+1}$, puis on sortira de $R_{m+1}$ en franchissant le côté $C_m$ en sens contraire et par conséquent en rentrant dans $R_m$.

3° Ou bien *BNB* enveloppe un des sommets de $R_m$. Ce sommet sera forcément de la 1ère catégorie puisqu'il ne pourra être sur *X*. Ce sommet appartiendra à un cycle comprenant par exemple $n$ sommets et la somme des angles correspondants sera $\frac{2\pi}{p}$. On rencontrera alors en parcourant *BNB* successivement $pn$ polygones $R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots \ldots R_{m+pn}$; la somme des angles en $D$ de tous ces polygones étant $2\pi$, $R_{m+pn}$ se confondra avec $R_m$.

Donc dans tous les cas possibles, on retombera sur le polygone $R_m$ après avoir parcouru le contour *BNB*. Parcourons maintenant l'arc *AMB* en sens contraire; nous rencontrerons successivement les polygones $R_m$, $R_{m-1}, \ldots \ldots R_1$, $R_0$, c'est à dire, dans l'ordre inverse, ceux que nous avions rencontrés en parcourant une première fois l'arc *AMB*. Quand nous serons de retour au point *A*, nous retomberons sur le polygone $R_0$. Donc le contour *AMA* sera de la 1ère espèce. C. Q. F. D.

IV. *Si deux contours AMBPA, APBNA sont de la 1ère sorte et de la 1ère espèce, il en sera de même du contour AMBNA formé par leur réunion.*




En effet si *AMBPA*, *APBNA* sont de la 1ère sorte, c'est que ni *AMB*, ni *ANB* ne sortent de la région recouverte par les polygones *R* et par conséquent que *AMBNA* est aussi de la 1ère sorte.

Si *AMBPA* est de la 1ère espèce on arrive au même polygone $R_n$ en suivant l'arc *AMB* ou l'arc *APB*; si *APBNA* est de la 1ère espèce on arrive au même polygone $R_n$ en suivant l'arc *APB* ou l'arc *ANB*. Donc on arrive au même polygone $R_n$ en suivant l'arc *AMB* ou l'arc *ANB*. Donc *AMBNA* est de la 1ère espèce. C. Q. F. D.

V. *Si un contour $AMA$ est de la 1ère sorte, tout contour $ANA$ qui lui est intérieur est aussi de la 1ère sorte.*

En effet si $AMA$ ne coupe pas $X$, il en sera de même du contour intérieur $ANA$. C. Q. F. D.

VI. *Un contour quelconque $AMA$ de la 1ère sorte est de la 1ère espèce.*

En effet ce contour pourra être décomposé en une infinité de contours comme ceux qui sont considérés dans le théorème III. En vertu du théorème V, ces contours sont tous de la 1ère sorte; donc en vertu du théorème III chacun d'eux est de la 1ère espèce, donc en vertu du théorème IV le contour total lui-même $AMA$ est de la 1ère espèce. C. Q. F. D.

*L'existence du groupe fuchsien correspondant à $R_0$ est donc démontrée.*

Les polygones $R$ transformés de $R_0$ par les diverses substitutions de ce groupe recouvriront toute la partie du plan située au-dessus de $X$ et ne la recouvriront qu'une fois.

*Je suppose maintenant que $R_0$ admette des cycles de la 4me sous-catégorie.*

Les théorèmes I, III et IV seront évidemment encore vrais. Mais il n'en sera pas de même du théorème II. Voyons comment il faudra le modifier dans le cas qui nous occupe.

Reprenons les notations de ce théorème. On démontrera comme plus haut que l'on peut prendre $q$ assez grand pour que tous les arcs $\lambda_p$ où $p > q$ soient de la 1ère espèce et sous-tendent un même sommet $D$. Je n'ai rien à ajouter pour le cas où $D$ est de la 1ère ou de la 3me catégorie, ou bien de la 3me sous-catégorie. Supposons maintenant que $D$ soit de la 4me sous-catégorie. Le nombre des arcs $\lambda_p$ $(p > q)$ sera-t-il fini ou infini? Nous avons vu (§ 5) qu'un arc de courbe qui ne coupe pas $X$ traverse un nombre infini des polygones $R$ qui ont un sommet en $D$ ou seulement un nombre fini, selon qu'il coupe ou ne coupe pas un certain cercle $C$ passant par $D$ et ayant son centre sur $X$.

Il suit de là qu'un arc $AMB$ qui ne coupe pas $X$ peut cependant être de la 2me sorte.

Considérons un arc $AMB$ de la 2e sorte venant aboutir à un cercle $C$ et supposons qu'il se déforme d'une façon continue, il ne pourra cesser d'être de la 2me sorte qu'en cessant de couper $C$, comme il est aisé de le comprendre.

Le théorème V est encore vrai, mais il a besoin d'une démonstration nouvelle. Envisageons un contour fermé $AMA$ qui soit de la 1ère sorte et un second contour $ANA$ intérieur au premier; je dis que ce second contour ne peut être de la 2de sorte: en effet s'il en était ainsi, il devrait couper un certain cercle $C$; on pourrait passer du contour $ANA$ au contour $AMA$ d'une façon continue, et en variant de la sorte, le contour $ANA$ ne cesserait pas de couper $C$: il ne cesserait donc pas d'être de la 2de sorte, de manière que $AMA$ devrait être de la 2de sorte, ce que nous n'avons pas supposé.

Le théorème V étant démontré, le théorème VI doit être vrai également et par conséquent *l'existence du groupe fuchsien correspondant à $R_0$ est démontrée.* Les polygones $R$, transformés de $R_0$ par les substitutions de ce groupe, recouvrent toute une partie du plan $S$ et ne la recouvrent qu'une fois. Cette région $S$ est tout entière au-dessus de $X$ et elle est limitée par des segments de cet axe et par une infinité de cercles tels que $C$ ayant leurs centres sur $X$.

Nous avons donc démontré dans tous les cas possibles l'existence du groupe fuchsien correspondant à $R_0$; mais la démonstration peut être considérablement simplifiée dans certains cas particuliers, par exemple quand on n'a pas de sommet de la 1ère catégorie. Dans ce cas, en effet, le polygone $R_0$, s'il a $2n$ côtés de la première sorte, divise la partie du plan située au dessus de $X$ en $2n+1$ régions, à savoir le polygone $R_0$ lui-même et la région comprise entre l'axe $X$ et chacun des côtés de la 1ère sorte. Considérons un côté $C_1$, la région $S_1$, comprise entre $C_1$ et $X$ et le polygone $R_1$ limitrophe de $R_0$ le long de $C_1$. Le polygone $R_1$ subdivisera la région $S_1$ en $2n$ régions plus petites, à savoir le polygone $R_1$ lui-même et la région comprise entre l'axe $X$ et chacun des côtés de la 1ère sorte restés libres. Quand on aura construit plusieurs polygones $R_0$, $R_1, \ldots\ldots R_p$, la partie du plan située au dessus de $X$ se trouvera partagée en un certain nombre de régions, à savoir les polygones $R_0$, $R_1$, $\ldots\ldots R_p$ et les régions $S_1$, $S_2, \ldots\ldots S_q$ comprises entre $X$ et chacun des côtés de la 1ère sorte restés libres. Si l'on cherche à construire un nouveau polygone limitrophe de $R_0$, $R_1, \ldots\ldots R_p$, il se trouvera tout entier dans une des régions $S_1$, $S_2, \ldots\ldots S_q$. Il est donc impossible que les polygones ainsi construits se recouvrent mutuellement. L'existence du groupe fuchsien correspondant à $R_0$ est donc démontrée.

## § 7. Principaux exemples.

Avant de donner quelques exemples de ces groupes fuchsiens dont je viens de démontrer l'existence d'une manière générale, je vais expliquer une notation dont je me servirai dans la suite pour définir certaines propriétés du polygone $R_0$. Je commencerai par désigner chacun des côtés de $R_0$ par un numéro d'ordre de telle sorte qu'en parcourant le périmètre de ce polygone dans un sens convenable, on rencontre successivement le côté 1, puis le côté 2, etc. Cela fait j'écrirai le numéro d'un des côtés de la 1ère sorte, puis celui de son conjugué, puis une virgule, puis un autre côté de la 1ère sorte, puis son conjugué, puis une virgule etc., puis enfin j'écrirai à la suite les numéros des côtés de la 2de sorte. Par exemple, si $R_0$ est un octogone dont les côtés de rang impair soient de la 1ère sorte, ceux de rang pair de la 2e sorte et dont les côtés opposés de la 1ère sorte soient conjugués, je dirai que le polygone $R_0$ est du système

(15, 37, 2468).

J'aurai ainsi défini le nombre des côtés de chaque sorte et la distribution des côtés en paires. De cette distribution des côtés en paires, nous déduirons celle des sommets en cycles.

Je vais maintenant étudier quelques exemples, en me servant des notations précédentes.

Exemple I. (14, 23).

Le polygone $R_0$ est un quadrilatère dont je désigne les sommets par $ABCD$; le côté 1 sera le côté $AB$; le côté 2, le côté $BC$; le côté 3, le côté $CD$; le côté 4, le côté $DA$. Tous les côtés sont de la 1ère sorte, ce sont donc des arcs de cercle ayant leur centre sur $X$; les côtés $AB$ et $AD$, $CB$ et $CD$ sont conjugués, ils sont donc congruents. Enfin l'angle $A$ est égal à $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'angle $B+D$ à $\frac{2\pi}{\beta}$, l'angle $C$ à $\frac{2\pi}{\gamma}$; les nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant entiers.

Nous pouvons joindre les deux sommets opposés $A$ et $C$ par un arc de cercle ayant son centre sur $X$, le quadrilatère $R_0$ se trouvera ainsi décomposé en deux triangles curvilignes $ACD$ et $ABC$.

Je voudrais maintenant définir une expression dont je serai quelquefois appelé à me servir dans la suite. Envisageons dans le plan une transformation par rayons vecteurs réciproques; soit 0 le centre de la transformation et $K^2$ son paramètre; le cercle $C$ dont le centre est 0 et le rayon $K$ demeure inaltéré par la transformation. Je dirai que cette transformation est une *réflexion sur le cercle C* et que deux figures transformées réciproques sont *symétriques par rapport à ce cercle.*

Cela posé, il est clair que les deux triangles $ACD$, $ABC$ sont symétriques par rapport au cercle $AC$. Il suit de là que les angles curvilignes $CAD$ et $CAB$, $ACD$ et $ACB$, $ABC$ et $ADC$ sont égaux, et par conséquent que le triangle $ABC$ a ses trois angles respectivement égaux à $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$.

Soit maintenant $R_1$ un quadrilatère limitrophe de $R_0$ le long d'un de ses côtés, de $AB$ par exemple; ces deux polygones seront symétriques par rapport au cercle $AB$.

Ceci nous conduit, dans le cas particulier qui nous occupe, à une construction très-simple du système des polygones $R$.

On construira d'abord un triangle $ABC$ dont les trois angles seront respectivement $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$; on peut construire une infinité de pareils triangles mais ils sont tous congruents entre eux; on construira alors les triangles symétriques de $ABC$ par rapport à leurs côtés restés libres et ainsi de suite. On partagera ainsi le plan en une infinité de triangles tous congruents à $ABC$ ou à $ACD$ et en les réunissant deux à deux, on aura partagé le plan en une infinité de quadrilatères congruents à $R_0 = ABCD$.

Qu'arrivera-t-il si l'un des nombres entiers $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ devient infini; supposons par exemple que ce soit $\gamma$ qui devienne infini; l'angle $C$ qui était égal à $\frac{2n}{\gamma}$ deviendra nul; le sommet $C$ cessera d'être de la 1ère catégorie pour devenir de la 3me sous-catégorie. $R_0$ se composerait encore de deux triangles $ABC$, $ADC$ symétriques par rapport au cercle $AC$. Les deux côtés $AC$ et $BC$ sont des arcs de cercle qui sont tangents en un point $C$ situé sur $X$; le côté $AB$ est aussi un arc de cercle coupant $AC$ et $BC$ sous des angles $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{\pi}{\beta}$.

Supposons en particulier:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Supposons de plus, pour achever de déterminer le triangle $ABC$, que les côtés $AC$ et $BC$ se réduisent à deux droites perpendiculaires à $X$ de telle façon que le point $C$ soit rejeté à l'infini; que la droite $BC$ prolongée vienne passer par l'origine 0; que la distance des deux parallèles $AC$ et $BC$ soit égale à $\frac{1}{2}$. Le cercle $AB$ aura alors pour centre 0 et pour rayon 1. On retombera ainsi sur le *Fundamentaldreieck* de M. Klein (Mathematische Annalen, Bd. XIV). Le groupe fuchsien correspondant est extrêmement remarquable; il se compose de toutes les substitutions $\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$ telles que $a$, $b$, $c$, $d$ étant entiers, on ait $ad - bc = 1$. C'est la considération de ce groupe et des sous-groupes qui y sont contenus qui est le fondement des recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

Exemple II. (16, 25, 34).

C'est l'exemple I du paragraphe 5. Le polygone $R_0$ est un hexagone $ABCDEF$ et les sommets forment quatre cycles distincts formés respectivement des sommets $A$; $BF$; $CE$; $D$; les angles curvilignes $A$, $B + F$, $C + E$, $D$ doivent être respectivement égaux à $\frac{2\pi}{\alpha}$, $\frac{2\pi}{\beta}$, $\frac{2\pi}{\gamma}$, $\frac{2\pi}{\delta}$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant des nombres entiers positifs ou infinis.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone se décompose en deux quadrilatères $ABCD$, $ADEF$, symétriques par rapport au cercle $AD$. Dans ce cas on a pour les angles curvilignes de ces deux quadrilatères les valeurs suivantes:

$$BAD = DAF = \frac{\pi}{\alpha}; \qquad CDA = EDA = \frac{\pi}{\delta};$$

$$B = F = \frac{\pi}{\beta}; \qquad C = E = \frac{\pi}{\gamma}.$$

Pour construire tous les hexagones $R$, on pourra alors opérer comme dans l'exemple précédent; on construira le quadrilatère $ABCD$, puis les quadrilatères symétriques par rapport à chacun de ses côtés, puis les quadrilatères symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés et ainsi de suite.

Considérons maintenant un exemple plus général. Supposons que $R_0$ soit un polygone de $2n$ côtés de la 1ère sorte dont les sommets soient successivement $A_1$, $A_2$, ...... $A_n$, $A_{n+1}$, $B_n$, $B_{n-1}$, ...... $B_2$. Supposons que les côtés

$A_1 A_2$ et $A_1 B_2$, $A_2 A_3$ et $B_2 B_3$, .... $A_{n-1} A_n$ et $B_{n-1} B_n$, $A_n A_{n+1}$ et $B_n A_{n+1}$ soient conjugués. Les sommets se répartiront en $n+1$ cycles:

$$A_1;\ A_2 B_2;\ A_3 B_3;\ \ldots\ldots;\ A_{n-1} B_{n-1};\ A_n B_n;\ A_{n+1}$$

et le polygone $R_0$ s'écrira dans le système de notation adopté:

$$(1 . 2n,\ 2 . 2n-1,\ 3 . 2n-2, \ldots\ldots,\ n-1 . n+2,\ n . n+1).$$

Dans un certain cas particulier, ce polygone $R_0$ se divisera en deux moitiés $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{n+1}$ et $A_1 B_2 B_3 \ldots\ldots B_n A_{n+1}$ symétriques par rapport au cercle $A_1 A_{n+1}$. Chacune de ces moitiés est un polygone curviligne dont les côtés ont leurs centres sur $X$ et dont les angles sont des parties aliquotes de $\pi$. Pour construire tous les polygones $R$, il suffit de partir de $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{n+1}$, de construire les polygones symétriques de celui-ci par rapport à l'un de ses côtés, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés et ainsi de suite.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de polygones générateurs de groupes fuchsiens. Parlons seulement des exemples déjà cités au paragraphe 5. Avec le mode de notation adopté les polygones $R_0$ des exemples II, III, IV et V s'écriraient:

(14, 25, 36)
(15, 26, 37, 48)
(13, 24, 57, 68)
(13, 57; 2468).

Quelles sont les conditions auxquelles dans ces quatre exemples doit satisfaire le polygone $R_0$ pour donner naissance à un groupe fuchsien?

Dans les trois premiers exemples les côtés conjugués doivent être congruents. De plus dans l'exemple II, la somme des angles de rang pair, comme celle des angles de rang impair doit être une partie aliquote de $2\pi$; dans les exemples III et IV c'est la somme de tous les angles qui doit diviser $2\pi$.

Dans l'exemple V, le polygone $R_0$ n'est assujetti à *aucune* condition.

## § 8. Classification en Genres.

J'ai fait voir dans ce qui précède comment on pouvait partager la partie du plan qui est au dessus de $X$ en une infinité de polygones curvilignes

$R$ congruents entre eux. Envisageons maintenant la partie du plan qui est au dessous de $X$, et dans cette partie du plan les polygones curvilignes $R'_0$, $R'_1$, etc. qui sont respectivement symétriques de $R_0$, $R_1$, etc. par rapport à $X$. Il est clair que si $R_i$ est le transformé de $R_0$ par une certaine substitution $f_i(z)$ du groupe $G$, $R'_i$ sera le transformé de $R'_0$ par cette même substitution. Les substitutions du groupe $G$ qui transforment $R_0$ en $R_1$, $R_2$, ...... transformeront donc de même $R'_0$ en $R'_1$, $R'_2$, ...... Mais plusieurs cas sont à considérer; si $R_0$ n'a pas de sommet de la 4$^e$ sous-catégorie, l'ensemble des polygones $R$ et $R'$ recouvre tout le plan; si au contraire, nous avons des sommets de cette sous-catégorie, les polygones $R$ et $R'$ laissent non recouvertes les régions situées à l'intérieur d'une infinité de cercles ayant leurs centres sur $X$.

Voici une seconde distinction plus importante pour ce qui va suivre. Supposons que le groupe $G$ soit de la 1$^{ère}$, de la 2$^{me}$ ou de la 6$^{me}$ familles, nous n'aurons ni sommet de la 3$^e$ catégorie, ni côté de la 2$^e$ sorte. Le polygone $R_0$ n'ayant pas pour côté de segment de $X$, sera complètement séparé de son symétrique $R'_0$ ou bien confinera à ce polygone par un sommet seulement (s'il a des sommets de la 2$^e$ catégorie) et non par tout un côté. Supposons au contraire que le groupe $G$ soit de la 3$^e$, de la 4$^e$, de la 5$^e$ ou de la 7$^e$ familles, le polygone $R_0$ aura un ou plusieurs côtés de la 2$^e$ sorte et confinera à son symétrique $R'_0$ tout le long de ces côtés. Supposons qu'on supprime ces côtés de la 2$^e$ sorte qui servent de frontière commune à $R_0$ et à $R'_0$, on pourra considérer l'ensemble des deux figures $R_0 + R'_0$ comme une seule région qui sera limitée seulement par des arcs de cercle ayant leurs centres sur $X$, c'est à dire par les côtés de la 1$^{ère}$ sorte de $R_0$ et ceux de $R'_0$. L'ensemble de ces arcs de cercle formera en général plusieurs courbes fermées séparées.

Nous allons maintenant pouvoir parler d'une nouvelle classification des groupes fuchsiens. Considérons d'abord un groupe de la 1$^{ère}$, de la 2$^e$ ou de la 6$^{me}$ familles: le polygone $R_0$ n'aura pas de côté de la 2$^e$ sorte; par conséquent les points du périmètre de $R_0$ seront correspondants deux à deux puisque à chaque point d'un côté de la 1$^{ère}$ sorte correspond un point de son conjugué; les points intérieurs à $R_0$ n'auront aucun correspondant ni dans ce polygone, ni sur son périmètre; enfin tous les sommets d'un même cycle seront correspondants. Supposons qu'on découpe le polygone $R_0$, puis qu'on le replie en le déformant d'une manière con-

tinue et de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre; après cette déformation, $R_0$ sera devenu une surface fermée. Si par exemple on reprend le quadrilatère $ABCD$ de l'exemple I du paragraphe précédent, et qu'après l'avoir découpé, on le replie en le déformant de telle sorte que $AB$ vienne se coller contre $AD$, puis $BC$ contre $CD$, $R_0$ aura pris l'aspect d'une surface fermée convexe.

Considérons maintenant un quadrilatère $ABCD$ du système (13, 24) de telle sorte que $AB$ soit conjugué de $CD$ et $AC$ de $BD$. Replions le quadrilatère de façon à coller $AB$ contre $CD$, il prendra l'aspect d'une sorte de cylindre ouvert par les deux bouts, les côtés $AC$ et $BD$ étant restés libres, mais étant devenus des courbes fermées; si on colle ensuite $AC$ contre $BD$, le quadrilatère prendra l'aspect d'une sorte d'anneau fermé.

On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres de la manière suivante. Sur une sphère, par exemple, on ne peut tracer un cycle fermé sans subdiviser la surface de la sphère en deux régions distinctes; il n'en est pas de même sur un tore dont un cercle méridien, par exemple, ne subdivise pas la surface en deux régions distinctes; mais on ne pourrait tracer sur le tore deux cycles fermés séparés sans obtenir une semblable subdivision.

Le genre d'une surface fermée est alors le nombre maximum des cycles fermés séparés que l'on peut tracer sur la surface sans la subdiviser en deux régions distinctes. Ainsi une surface fermée dans laquelle on aurait percé $p$ trous serait de genre $p$.

*Le genre d'un groupe fuchsien sera le genre de la surface fermée, obtenue comme il vient d'être dit par la déformation de* $R_0$.

Comment obtenir l'expression de ce genre?

Supposons qu'on ait subdivisé une surface de genre $p$ en $F$ polygones curvilignes, que le nombre total des côtés soit $A$ et celui des sommets $S$, on aura la relation

$$F + S - A = -2p + 2.$$

Reprenons le polygone $R_0$; soit $2n$ le nombre de ses côtés de la 1[ère] sorte, et $q$ celui des cycles fermés. Après la déformation, les côtés étant venus se coller l'un contre l'autre deux à deux, le nombre des côtés distincts restants sera $n$; de même le nombre des sommets distincts restants sera $q$.

On aura donc:

$$F = 1 \qquad A = n \qquad S = q$$

d'où

$$q + 1 - n = 2 - 2p$$

ou

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

Reprenons les exemples I et II du paragraphe précédent; nous aurons:

$$q = n + 1$$

d'où

$$p = 0.$$

Je vais donner une autre application de la règle qui précède.

Supposons que le polygone $R_0$ ait $2n$ côtés de la 1$^{\text{ère}}$ sorte et de telle façon que les côtés opposés soient conjugués. Pour trouver le genre du groupe fuchsien correspondant, il faut chercher le nombre des cycles entre lesquels se répartissent les $2n$ sommets. En appliquant la règle du § 5, on trouve que tous les sommets appartiennent à un même cycle si $n$ est pair, et que si $n$ est impair, on a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. On a donc:

$$q = 1 \text{ ou } 2$$

selon que $n$ est pair ou impair, et par conséquent:

$$p = \frac{n}{2}$$

si $n$ est pair, et

$$p = \frac{n + 1}{2}$$

si $n$ est impair.

Supposons maintenant que le polygone $R_0$ admette des côtés de la 2$^{\text{e}}$ sorte; il sera contigu tout le long de ces côtés à $R'_0$, de sorte que la région $R_0 + R'_0$ sera d'une seule pièce; les points situés à l'intérieur de cette région ne pourront être correspondants à aucun autre point de la région; les points du périmètre, qui appartiendront tous à des côtés de la 1$^{\text{ère}}$ sorte de $R_0$ ou de $R'_0$, seront correspondants deux à deux; enfin les sommets d'un même cycle seront des points correspondants. Découpons

maintenant la région $R_0 + R_0'$ et replions-la en la déformant de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre. Le genre du groupe fuchsien sera par définition celui de la surface fermée ainsi obtenue.

Soit encore $2n$ le nombre des côtés de la 1ère sorte de $R_0$, $q$ celui de ses cycles fermés; $R_0'$ aura de même $2n$ côtés de la 1ère sorte et $q$ cycles fermés. Supposons que nous ayons $h$ côtés de la 2e sorte et par conséquent $h$ cycles ouverts qui seront communs à $R_0$ et à $R_0'$.

Reprenons la formule:

$$F + S - A = 2 - 2p.$$

Nous aurons $F = 2$, car nous avons deux polygones $R_0$ et $R_0'$; nous aurons $A = 2n + h$, car nous avons $n$ paires de côtés de la 1ère sorte provenant de $R_0$, $n$ paires de côtés de la 1ère sorte provenant de $R_0'$ et $h$ côtés de la 2e sorte; enfin on aura $S = 2q + h$, puisque nous avons en tout $2q$ cycles fermés et $h$ cycles ouverts.

Il vient donc:

$$p = n - q.$$

Supposons par exemple que $R_0$ soit de la 3e famille, c'est à dire que tous ses sommets soient de la 3e catégorie. On a alors:

$$q = 0 \qquad p = n.$$

Ainsi dans l'exemple V du § 5, le genre est égal à 2. Comme second exemple, je prends un polygone $R_0$ dont la distribution des côtés est donnée par la formule suivante:

$$(15,\ 24;\ 3)$$

ou plus généralement:

$$(1\,.\,2n + 1,\quad 2\,.\,2n,\quad 3\,.\,2n - 1, \ldots\ldots,\ n\,.\,n + 2;\ n + 1)$$

de telle sorte que le $n + 1^{e}$ côté soit seul de la 2e sorte et que les côtés d'ordre $m$ et $2n + 2 - m$ soient conjugués.

On aura dans ce cas:

$$q = n$$

d'où

$$p = 0.$$

## § 9. Simplification du Polygone Générateur.

Nous avons vu au commencement du § 5 que les régions $R_0$ ne sont pas complètement définies par cette condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point $z$ donné. Nous avons ensuite imposé à ces régions une condition de plus, celle de se réduire à des polygones curvilignes ayant pour côtés des arcs de cercle et des segments de $X$. Mais les régions $R_0$ ( ou *polygones générateurs*) ne sont pas encore par là complètement déterminées. En effet nous avons vu qu'on pouvait ajouter à $R_0$ une région quelconque $S_0$ à la condition d'en retrancher une région $S_p$ transformée de $S_0$ par une des substitutions du groupe fuchsien, et que la région ainsi obtenue $R_0 + S_0 - S_p$ pouvait servir de la même façon que $R_0$ à engendrer ce groupe. Si les régions $R_0$, $S_0$ et $S_p$ sont contiguës et si elles se réduisent toutes trois à des polygones normaux, c'est à dire dont les côtés sont des segments de $X$ ou des arcs de cercle ayant leurs centres sur $X$, la région résultante $R_0+S_0-S_p$ est également un polygone normal. Il suit de là qu'un même groupe fuchsien peut être engendré par une infinité de polygones générateurs $R_0$ et qu'on peut profiter de cette indétermination pour simplifier ce polygone.

Voici comment peut s'effectuer une pareille simplification. Joignons deux points $A$ et $B$ du périmètre de $R_0$ par un arc de cercle ayant son centre sur $X$, de façon à diviser ce polygone en deux autres $S_0$ et $T_0$; considérons deux côtés conjugués $CD$ et $EF$ de $R_0$ et supposons que $CD$ appartienne tout entier au périmètre de $S_0$ et $EF$ à celui de $T_0$. Soit $R_1$ le polygone qui est limitrophe de $R_0$ le long de $EF$ et supposons-le décomposé en deux polygones $S_1$ et $T_1$ respectivement congruents à $S_0$ et $T_0$. Le polygone $R_0' = S_1 + T_0$ pourra servir, aussi bien que $R_0$, de polygone générateur pour le groupe fuchsien $G$. Il peut se faire que la considération de $R_0'$ soit plus avantageuse que celle de $R_0$, ou bien encore qu'en faisant sur $R_0'$ une opération analogue à celle qu'on vient de faire sur $R_0$, on arrive à un polygone $R_0''$ plus simple que les deux autres.

Dans chaque cas particulier, on se laissera guider par les circonstances du problème, aussi ne veux-je pas insister plus longuement sur ce point. Je me bornerai à quelques exemples, en reprenant les notations du § 7.

1° Un polygone $R_0$ du système (16, 23, 45) peut toujours être ramené à un polygone du système (16, 25, 34).

2° Un polygone du système (12, 34, 56, 78) peut toujours être ramené à un polygone du système (18, 27, 36, 45).

3° Un octogone du système (13, 24, 57, 68) peut toujours être ramené à un octogone du système (15, 26, 37, 48).

Quelles sont, dans cette transformation des polygones curvilignes $R_0$, les propriétés de ce polygone qui demeurent invariables?

1° La famille du polygone $R_0$ ne change pas, sauf une exception dont je parlerai plus loin.

2° Son genre ne change pas non plus.

3° Le nombre des cycles fermés de la 3e sous-catégorie ne varie pas.

4° Il en est de même du nombre des cycles fermés de la 4ème sous-catégorie.

5° Le nombre des cycles fermés de la 2e sous-catégorie ne varie pas non plus. On a vu que la somme des angles correspondants aux divers sommets d'un pareil cycle était égale à $\frac{2\pi}{p}$, $p$ étant un nombre entier supérieur à l'unité. La valeur de ce nombre $p$ demeure également invariable.

6° On peut au contraire en général augmenter ou diminuer à volonté le nombre des cycles fermés de la 1ère sous-catégorie qui sont tels que la somme des angles qui correspondent à tous les sommets du cycle est égale à $2\pi$.

## § 10. **Isomorphisme.**

Nous avons vu au commencement du § 3 qu'un groupe fuchsien $H$ est isomorphe à un autre groupe fuchsien $G$ si le nombre des substitutions fondamentales est le même et si de plus toutes les relations de la forme [(6) § 3] qui existent entre les substitutions de $G$, subsistent entre celles de $H$. Pour reconnaître l'isomorphisme de deux groupes donnés, nous sommes donc amenés à chercher les relations de la forme [(6) § 3] qui existent entre les substitutions d'un groupe donné et en particulier les *relations fondamentales* dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Nous avons vu au § 3 qu'on obtenait les relations de la forme (6) de la manière suivante: on décrit à partir d'un point $A$ intérieur à $R_0$

un contour fermé quelconque $AMA$ ne sortant pas de la région du plan située au dessus de $X$. Supposons que ce contour traverse successivement des régions $R_0$, $R_{\alpha_1}$, $R_{\beta_2}$ ...... $R_{\beta_{\nu-1}}$ et enfin une région $R_{\beta_\nu}$ se confondant avec $R_0$, qu'il passe de la région $R_{\beta_{x-1}}$ dans la région $R_{\beta_x}$ en franchissant un côté de $R_{\beta_{x-1}}$ qui est l'homologue de celui des côtés de $R_0$ qui sert de frontière commune à cette région et à $R_{\alpha_x}$. Nous pourrons écrire la relation identique:

$$z = f_{\alpha_1}[f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3} \ldots\ldots (f_{\alpha_\nu}(z)) \ldots\ldots]$$

qui est de la forme (6) et on obtiendra de la sorte toutes les relations de cette forme. Mais si on ne veut écrire que les relations fondamentales, il ne sera pas nécessaire de décrire tous les contours $AMA$ possibles; on se bornera aux contours infiniment petits qui enveloppent les sommets de $R_0$. Envisageons donc successivement les divers sommets de $R_0$ et décrivons autour de chacun d'eux un contour infinitésimal. Comme ce contour $AMA$ ne devra pas sortir de la partie du plan située au dessus de $X$, on ne pourra décrire de semblable contour autour des sommets de $R_0$ qui sont situés sur cet axe $X$ lui-même. Les seuls sommets du polygone $R_0$ que nous ayons à envisager sont donc des sommets de la 1ère catégorie.

Je suppose que les différents côtés de $R_0$ soient numérotés de telle sorte qu'en suivant dans un sens convenable le périmètre de ce polygone on rencontre successivement les côtés $C_1$, $C_2$, $C_3$, ...... $C_q$; $q$ étant le nombre total des côtés; $A_1$ sera le sommet situé entre $C_q$ et $C_1$; $A_2$ le sommet situé entre $C_1$ et $C_2$; etc. En général $A_i$ sera le sommet situé entre $C_{i-1}$ et $C_i$. Si $C_i$ est de la 1ère sorte, la région limitrophe de $R_0$ le long de $C_i$ s'appellera $R_i$ et la substitution fondamentale correspondante sera:

$$[z, f_i(z)].$$

Considérons l'un quelconque des sommets de la 1ère catégorie que j'appelle $A_{\alpha_1}$. Ce sommet fera partie d'un certain cycle de la 1ère catégorie; on trouvera les autres sommets de ce cycle en appliquant la règle du § 5. Supposons que cette règle donne successivement les sommets:

$$A_{\alpha_1}\, A_{\alpha_2} \ldots\ldots A_{\alpha_p}$$

et précisément dans cet ordre. Supposons que la somme des angles corre-

spondants à ces sommets soit $\frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda$ sera un nombre entier. Posons pour abréger:

$$F(z) = f_{a_1}[f_{a_2}[f_{a_3} \dots\dots [f_{a_p}(z)] \dots\dots]$$
$$F[F(z)] = F^2(z) \qquad F[F^2(z)] = F^3(z) \dots\dots$$
$$F[F^{\lambda-1}(z)] = F^\lambda(z).$$

La relation fondamentale à laquelle conduira, d'après la règle exposée plus haut, un contour infinitésimal décrit autour de $A_{a_1}$ sera:

$$z = F^\lambda(z).$$

Les sommets $A_{a_2}$, $A_{a_3} \dots\dots A_{a_p}$ qui appartiennent au même cycle que $A_{a_1}$ conduisent à la même relation. Donc:

*Le nombre des relations fondamentales qui existent entre les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien G, est précisément celui des cycles de la 1ère catégorie du polygone $R_0$ correspondant.*

Or les polygones des 2e, 3e et 4e familles n'admettent pas de cycle de cette catégorie. Donc il n'y a aucune relation fondamentale entre les substitutions des groupes de ces familles, et les relations de la forme (6) que l'on pourrait trouver entre ces substitutions se réduisent toutes à des identités.

Voici une première conséquence que l'on peut tirer de ce fait: *tout groupe H dérivé de n substitutions fondamentales est isomorphe à un groupe fuchsien G de la 2e, de la 3e ou de la 4e familles, pourvu que ce groupe soit également dérivé de n substitutions fondamentales.* En effet la première condition de l'isomorphisme qui exige que le nombre des substitutions fondamentales soit le même est remplie, et la seconde qui exige que toute relation entre les substitutions de $G$ subsiste entre celles de $H$ est satisfaite d'elle-même puisqu'il n'existe pas de pareille relation. Seulement une distinction est à faire. S'il y a des relations de la forme (6) entre les substitutions de $H$, $G$ n'est pas isomorphe à $H$ et par conséquent l'isomorphisme est mériédrique. Si au contraire il n'y a pas de semblable relation, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent holoédrique. Il en résulte que *deux groupes fuchsiens de la 2e, de la 3e ou de la 4me familles sont holoédriquement isomorphes pourvu que le nombre des substitutions fondamentales soit le même, c'est à dire pourvu que les deux polygones $R_0$ correspondants aient un même nombre de côtés de la 1ère sorte.*

Considérons maintenant deux polygones $R_0$ et $R'_0$ quelconques, mais dont les côtés de la 1ère et de la 2e sorte soient distribués de la même manière, de telle sorte qu'ils soient désignés par la même formule, si on emploie la notation exposée au commencement du § 7. Ces deux polygones appartiendront évidemment au même genre et à la même famille et le nombre de cycles, formés par les sommets des deux polygones, est le même, de telle façon qu'à chaque cycle de $R_0$ corresponde un cycle de $R'_0$ et réciproquement. D'ailleurs, à un cycle fermé du premier polygone, correspondra dans le second polygone un cycle également fermé. Si de plus la somme des angles de chaque cycle fermé de $R_0$ est la même que la somme des angles du cycle correspondant de $R'_0$, les deux groupes fuchsiens engendrés par ces deux polygones seront holoèdriquement isomorphes.

## § 11. Formation effective des Groupes Fuchsiens.

Un groupe fuchsien est complètement détérminé quand on connaît ses substitutions fondamentales, qu'il suffit de combiner de toutes les manières possibles pour obtenir toutes les substitutions du groupe. Former un groupe fuchsien, c'est donc calculer les coëfficients de ses substitutions fondamentales. Ce problème ne présente aucune difficulté. Supposons en effet que l'on ait construit le polygone $R_0$ correspondant au groupe à former et que l'on ait calculé les coordonnées et par conséquent les affixes de tous ses sommets. Les substitutions fondamentales cherchées sont celles qui changent chaque côté de la 1ère sorte en son conjugué. Soit donc $\alpha, \beta$ et $\gamma, \delta$ les affixes des sommets de deux côtés conjugués de $R_0$. Supposons d'abord que les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ soient toutes quatre imaginaires, de telle façon qu'aucun de ces sommets ne soit situé sur $X$. On devra avoir en appelant $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ les quantités imaginaires conjuguées de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$:

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

c'est à dire

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}. \tag{1}$$

La substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est alors parfaitement déterminée; pour l'écrire en mettant en évidence la réalité des coëfficients, je poserai:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \qquad \beta = \beta_1 + i\beta_2 \qquad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \qquad \delta = \delta_1 + i\delta_2$$
$$\alpha' = \alpha_1 - i\alpha_2 \qquad \beta' = \beta_1 - i\beta_2 \qquad \gamma' = \gamma_1 - i\gamma_2 \qquad \delta' = \delta_1 - i\delta_2.$$

La substitution cherchée s'écrira alors:

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

où:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & \gamma_2 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Mais on peut faire encore deux hypothèses; supposons que $\alpha$ et $\gamma$ soient réels tandis que $\beta$ et $\delta$ restent imaginaires; la condition (1) n'a plus alors de raison d'être; la substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est encore parfaitement déterminée et elle s'écrit

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D}\right);$$

les coëfficients $A$, $B$, $C$, $D$ ont la même expression que plus haut, mais il faut remarquer que $\alpha_2$ et $\gamma_2$ sont nuls.

Supposons maintenant que les quatre quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ soient réelles, la substitution qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ ne sera plus déterminée. Dans l'expression de ses coëfficients entrera un paramètre arbitraire $h$. Elle s'écrira

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

et les coëfficients $A$, $B$, $C$, $D$ auront pour expression:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \gamma & 1 \\ \beta\delta & \delta & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & \gamma \\ \beta\delta & \beta & \delta \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & 1 \\ \beta\delta & \beta & 1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Les quantités réelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ pour pouvoir être les sommets d'un polygone $R_0$ sont assujetties à l'inégalité:

$$\left[\frac{1}{\delta-\alpha}-\frac{1}{\gamma-\alpha}\right]\left[\frac{1}{\delta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\alpha}\right]<0.$$

Quant à $h$, c'est un paramètre arbitraire qui est supposé réel et assujetti à l'inégalité:

$$(\gamma+h)(\delta+h)(\delta-\gamma)(\beta-\alpha)>0.$$

Ainsi quand on connaît les affixes des sommets de $R_0$ qui exprime que le déterminant $AD-BC$ est positif, on peut calculer les coëfficients des substitutions fondamentales de $G$. Il s'agit donc de choisir ces affixes de telle façon que le polygone $R_0$ satisfasse aux conditions du § 6 qui sont nécessaires pour qu'il donne naissance à un groupe fuchsien. C'est là un problème purement algébrique et qui ne présente aucune difficulté. La grande variété des cas possibles ne me permettra pas de les examiner tous en détail ce qui m'entraînerait à des répétitions et à des longueurs inutiles. Je me bornerai donc à envisager quelques exemples.

## 1er EXEMPLE.

Cherchons d'abord à former les groupes fuchsiens de la 3me famille dérivés de $n$ substitutions fondamentales. Le polygone $R_0$ correspondant aura $2n$ côtés de la 1ère sorte et $2n$ de la 2me. Pour déterminer complètement un pareil polygone, il faut s'imposer arbitrairement $4n$ conditions. Mais nous avons vu au § 9 qu'un même groupe $G$ peut être engendré par une infinité de polygones $R_0$. Si l'on tient compte de cette circonstance, on reconnaîtra aisément que pour déterminer complètement le groupe de la 3me famille dérivé de $n$ substitutions fondamentales, il faut s'imposer arbitrairement $3n$ conditions. Or c'est là précisément le nombre total des coëfficients de $n$ substitutions réelles quelconques. Il ne s'en suit pas qu'il suffise de prendre au hasard $n$ substitutions réelles pour que le groupe qui en dérive soit un groupe fuchsien de la 3me famille; mais *les coëfficients de ces substitutions ne seront assujettis à aucune condition d'égalité; ils devront seulement satisfaire à certaines inégalités.*

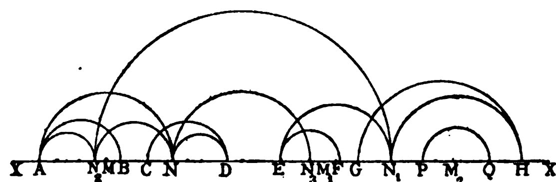
Quelles sont ces inégalités? tel est le problème qu'il nous reste à résoudre. On trouve d'abord sans peine que toutes les substitutions doivent être hyperboliques et par conséquent leurs points doubles doivent

être réels et situés sur $X$. On peut énoncer un résultat général au sujet de la distribution de ces points doubles sur $X$. En effet, considérons deux côtés conjugués $ab$ et $cd$ de $R_0$ et supposons qu'ils soient de la 1ère sorte et appartiennent à la même paire. Supposons de plus pour fixer les idées que le point $\infty$ fasse partie de $R_0$ de telle façon que ce polygone soit la région du plan située au dessus de $X$ et extérieure aux différents cercles qui forment ses côtés de la 1ère sorte. Si cela n'était pas, on ferait un changement convenable de la variable. Il y aura une substitution fondamentale qui changera $ab$ en $cd$ et *ses deux points doubles seront situés l'un sur le segment $ab$ de $X$, l'autre sur le segment $cd$.*

Pour pousser plus loin l'étude des inégalités qui ont lieu entre les coëfficients des substitutions fondamentales d'un groupe de la 3me famille, je vais prendre un exemple particulier, à savoir l'octogone de l'exemple V du § 5. La méthode que j'emploierai s'étendrait d'ailleurs au cas le plus général.

Les deux substitutions fondamentales changent $AB$ en $DC$ et $EF$ en $HG$. Considérons d'abord la substitution $S$ qui change $AB$ en $DC$; ses deux points doubles $M$ et $N$ sont situés respectivement sur les segments $AB$ et $CD$ de l'axe $X$. Décrivons un cercle sur $AN$ comme diamètre, et envisageons le triangle curviligne $ABN$; envisageons également le cercle décrit sur $DN$ comme diamètre et le triangle curviligne $DCN$; la substitution $S$ changera le triangle $ABN$ en $DCN$; nous pouvons donc en vertu des principes du § 9 remplacer l'octogone $R_0 = ABCDEFGH$ par l'heptagone $R_0' = ANDEFGH$. Envisageons de même la substitution $S_1$ qui change $EF$ en $HG$ et ses deux points doubles $M_1$ et $N_1$ situés l'un sur le segment $EF$, l'autre sur le segment $GH$. Par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, on verrait que l'on peut remplacer l'heptagone $R_0'$ par l'hexagone $R_0'' = ANDEN_1H$. Remarquons que $R_0''$ est de la 4e famille et du 2me ordre de cette famille, tandis que $R_0$ était de la 3me famille. C'est là l'exception que j'avais annoncée aux principes du § 9; on peut simplifier le polygone générateur $R_0$ de façon à ramener un polygone de la 3me à un polygone du 2me ordre de la 4me ou même de la 2me familles; mais jamais à un polygone du 1er ordre de la 4me ou de la 2me familles. Envisageons maintenant l'opération $S_2$ qui consiste à faire d'abord la substitution $S$, puis la substitution inverse de $S_1$. La substitution $S$ change $AN$ en $DN$, et la substitution inverse de $S_1$ change

$DN$ en un certain cercle $PQ$ intérieur à $N_1 H$. La substitution $S_2$ change donc $AN$ en $PQ$ et ses deux points doubles $N_2$ et $M_2$ sont situés, l'un sur le segment $AN$, l'autre sur le segment $PQ$. La substitution $S$ change $N_2$ en un certain point $N_3$; la substitution $S_1$ devra changer aussi $N_2$ en $N_3$; $N_3$ est donc situé sur le segment $N_1 E$. Décrivons des cercles sur $N_2 N$, $N_2 N_1$, $N_1 N_3$, $NN_3$ comme diamètres; la substitution $S$ change $N_2 N$ en $N_3 N$, $N_2 N_1$ en $N_3 N_1$ et cela nous permet en vertu des principes du § 9 de remplacer l'octogone $R_0$ par le quadrilatère $R_0''' = N_1 N_2 N N_3$.




Ce quadrilatère est de la 2[me] famille et du 2[me] ordre de cette famille.

Nous allons maintenant pouvoir trouver les inégalités qui ont lieu entre les coëfficients de $S$ et de $S_1$; on peut toujours supposer que les points doubles de $S_1$ sont 0 et $\infty$ de telle sorte que

$$N_1 = 0 \qquad M_1 = \infty$$

car si cette condition n'était pas remplie, il suffirait d'un changement très simple de variable pour être ramené au cas où l'on a $N_1 = 0$, $M_1 = \infty$.

Les deux substitutions s'écrivent alors:

$$S = \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right) \qquad S_1 = (z, Kz).$$

$K$ est essentiellement positif et plus grand que 1. De plus on peut toujours supposer que $c$ est positif sans quoi on changerait tous les signes des quatre quantités $a$, $b$, $c$, $d$. Les points $M$ et $N$ sont les points doubles de $S$ et par conséquent les racines de l'équation:

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{1}$$

Les points $M_2$ et $N_2$ sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az+b}{K(cz+d)}\right)$$

ou les racines de l'équation:

$$cz^2 + \left(d - \frac{a}{K}\right)z - \frac{b}{K} = 0. \tag{2}$$

Le point $N_3$ et un autre point $M_3$ sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az + bK}{cz + dK}\right)$$

et les racines de l'équation:

(3) $$cz^2 + (dK - a)z - bK = 0.$$

L'inspection de la figure montre que les quantités $M, N, M_2, N_2, M_3, N_3$ sont toutes réelles et de même signe; positives par exemple; d'où les relations:

$$b < 0 \qquad (d - a)^2 + 4bc > 0 \qquad a > d$$
$$\frac{b}{K} < 0 \qquad (dK - a)^2 + 4Kbc > 0 \qquad a > dK$$
$$bK < 0 \qquad (dK - a)^2 + 4Kbc > 0 \qquad a > dK$$

qui se réduisent à:

$$b < 0 \qquad a > dK \qquad (a + d)^2 > 4 \qquad a > d$$
$$\left(\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K}\right)^2 > 4$$

en tenant compte de

$$ad - bc = 1.$$

Exprimons maintenant que $M_2$ et $N_2$ sont plus petits et que $M_3$ et $N_3$ sont plus grands que $M$ et $N$. On trouve ainsi les conditions:

$$b < 0 \qquad a^2 + bc > 1 > d^2 + bc$$
$$b < 0 \qquad \frac{a^2}{K} + bc < 1 < d^2 K + bc \qquad a - dK > a - d > \frac{a}{K} - d.$$

Toutes ces conditions se réduisent aux suivantes:

$$a > 0 \qquad b < 0 \qquad d < 0 \qquad a + d > 2$$
$$\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} < -2$$

Cette méthode s'applique à tous les groupes fuchsiens de la 3[me] famille. On peut toujours par ce procédé ramener le polygone $R_0$ à un polygone du 2[e] ordre de la 2[me] famille. Les sommets de ce nouveau polygone seront connus car ce seront les points doubles des substitutions fondamentales ou de quelques-unes de leurs combinaisons. Pour trouver les inégalités cherchées, il suffit d'exprimer que ces sommets sont disposés d'une certaine manière.

## 2me EXEMPLE.

Nous prendrons pour deuxième exemple les groupes de la 1ère famille et du genre 0 et, pour particulariser encore, nous choisirons l'hexagone $ABCDEF$ de l'exemple II du § 7.

Nous avons ici trois substitutions fondamentales:

$S_1$ qui change $AB$ en $AF$
$S_2$ qui change $BC$ en $FE$
$S_3$ qui change $CD$ en $ED$.

Nous envisagerons en outre:

$S_4$ combinaison de $S_2$ et de $S_1$ pris en sens contraire
$S_5$ combinaison de $S_3$ et de $S_2$ pris en sens contraire.

On peut considérer le groupe comme dérivé de $S_1$, $S_4$ et $S_5$.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$ les affixes des points $A$, $B$, $C$, $D$; $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ leurs quantités imaginaires conjuguées; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ les angles $A$, $B+F$, $C+E$, $D$ qui sont des parties aliquotes de $2\pi$. Les substitutions $S_1$, $S_4$, $S_5$ et $S_3$ s'écriront:

$$\left(\frac{z-a}{z-a'},\ e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-a'}\right) \qquad \left(\frac{z-b}{z-b'},\ e^{i\beta}\frac{z-b}{z-b'}\right)$$

$$\left(\frac{z-c}{z-c'},\ e^{i\gamma}\frac{z-c}{z-c'}\right) \qquad \left(\frac{z-d}{z-d'},\ e^{i\delta}\frac{z-d}{z-d'}\right).$$

Exprimons que la combinaison des quatre substitutions $S_3$, $S_5$, $S_4$, $S_1$ faites successivement équivaut à la substitution identique $(z, z)$; nous arriverons à trois relations entre $a$, $b$, $c$, $d$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Supposons ces relations satisfaites. Suffiront-elles pour que le groupe dérivé des substitutions $S_1$, $S_5$, $S_4$ soit discontinu? Non, il faudra encore que les points $A$, $B$, $C$, $D$ puissent former quatre sommets d'un hexagone $ABCDEF$ où les angles:

$$A = \alpha \qquad B + F = \beta \qquad C + E = \gamma \qquad D = \delta.$$

Considérons les angles curvilignes du quadrilatère $ABCD$ obtenu en joignant les quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ par des arcs de cercle ayant leurs centres sur $X$. Il faut que les quatre angles $A$, $B$, $C$, $D$ de ce quadrilatère soient respectivement plus petits que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; d'où les inégalités:

(2)
$$\begin{aligned}
0 &< \arg.\frac{d-a}{d'-a'}\frac{b'-a'}{b-a} < \alpha \\
0 &< \arg.\frac{a-b}{a'-b'}\frac{c'-b'}{c-b} < \beta \\
0 &< \arg.\frac{b-c}{b'-c'}\frac{d'-c'}{d-c} < \gamma \\
0 &< \arg.\frac{c-d}{c'-d'}\frac{a'-d'}{a-d} < \delta.
\end{aligned}$$

Comment reconnaîtrons-nous maintenant si trois substitutions données $S_1$, $S_4$, $S_6$ peuvent être considérées comme les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien analogue à celui qui nous occupe. On formera la substitution $S_8$, combinaison de la substitution inverse de $S_1$, de l'inverse de $S_4$, et de l'inverse de $S_6$ faites successivement. On calculera les points doubles $a$, $a'$; $b$, $b'$; $c$, $c'$; $d$, $d'$ de ces quatre substitutions et leurs multiplicateurs $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$. Deux conditions devront être remplies: 1° $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ devront être parties aliquotes de $2\pi$; 2° les quantités $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$, $d$, $d'$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ devront satisfaire aux inégalités (2).

### 3^e^ EXEMPLE.

Nous prendrons pour troisième exemple les groupes de la 2^e^ famille, du 1^er^ ordre et du genre 0; et parmi ces groupes, nous choisirons encore celui qui est engendré par l'hexagone $R_0 = ABCDEF$ considéré dans l'exemple II du § 7. Seulement ici cet hexagone devant être de la 2^e^ famille, tous ses sommets seront sur $X$. Nous envisagerons, comme dans l'exemple précédent, les substitutions:

$S_1$ qui change $AB$ en $AF$
$S_2$ qui change $BC$ en $FE$
$S_3$ qui change $DC$ en $DE$
$S_4$ combinaison de $S_2$ et de l'inverse de $S_1$
$S_5$ combinaison de $S_3$ et de l'inverse de $S_2$.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ les affixes des sommets de $R_0$; ces quantités seront essentiellement réelles. Les substitutions $S_1$, $S_4$, $S_5$ et $S_3$ devront être paraboliques puisque le groupe est supposé du 1^er^ ordre, et elles s'écriront:

$$S_1 = \left(\frac{1}{z-a}, \quad \frac{1}{z-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a}\right)$$

$$S_4 = \left(\frac{1}{z-b}, \quad \frac{1}{z-b} + \frac{1}{h-b} - \frac{1}{c-b}\right)$$

$$S_5 = \left(\frac{1}{z-c}, \quad \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{k-c}\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{z-d}, \quad \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}\right)$$

où $h$ et $k$ sont deux quantités définies par les équations

$$\frac{1}{e-a} = \frac{1}{h-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{1}{f-d} = \frac{1}{k-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}.$$

Quelles sont maintenant les conditions pour que les trois substitutions $S_1$, $S_4$, $S_5$ donnent naissance à un groupe fuchsien? Il faut que les six quantités $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ se succèdent précisément dans cet ordre circulaire, ou bien dans l'ordre inverse de sorte qu'on doit avoir:

(3) $$\frac{1}{b-a} < \frac{1}{c-a} < \frac{1}{d-a} < \frac{1}{e-a} < \frac{1}{f-a}$$

ou bien

$$\frac{1}{b-a} > \frac{1}{c-a} > \frac{1}{d-a} > \frac{1}{e-a} > \frac{1}{f-a}.$$

Exprimons maintenant que la combinaison des substitutions $S_3$, $S_5$, $S_4$, $S_1$ équivaut à la substitution identique, il viendra:

(4) $$(b-a)(d-c)(f-e) = (c-b)(e-d)(a-f).$$

## REMARQUE.

Dans les deux exemples qui précèdent, il est peut-être avantageux d'envisager, non l'hexagone $ABCDEF$ de l'exemple II du § 7, qui serait noté (16, 25, 34), mais l'hexagone noté (12, 34, 56) qui lui est équivalent d'après ce qu'on a vu au § 9.

Soit $ABCDEF$ cet hexagone, les côtés $AB$ et $BC$, $CD$ et $DE$, $EF$ et $FA$ seront conjugués. Envisageons les substitutions:

$S_1$ qui change $BA$ en $BC$
$S_2$ qui change $DC$ en $DE$
$S_3$ qui change $FE$ en $FA$
$S_4$ combinaison de $S_1$, $S_2$ et $S_3$.

Ces quatre substitutions seront elliptiques et leurs multiplicateurs seront $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant des parties aliquotes de $2\pi$.

$B$ sera l'un des points doubles de $S_1$, $D$ l'un des points doubles de $S_2$, $F$ l'un des points doubles de $S_3$, $A$ l'un des points doubles de $S_4$; quant aux autres points doubles de ces substitutions, ce seront respectivement les quantités imaginaires conjuguées de $B$, $D$, $F$, $A$; $C$ sera le transformé de $A$ par $S_1$, $E$ celui de $C$ par $S_2$. Pour que le groupe dérivé de $S_1$, $S_2$, $S_3$ soit discontinu, il suffit que l'hexagone curviligne normal $ABCDEF$ soit convexe; d'où les conditions:

$$\text{arg.}\frac{d-b}{d'-b'}\frac{f'-b'}{f-b} < \alpha$$

$$(5) \qquad \text{arg.}\frac{f-d}{f'-d'}\frac{b'-d'}{b-d} < \beta$$

$$\text{arg.}\frac{b-f}{b'-f'}\frac{d'-f'}{d-f} < \gamma.$$

Pour reconnaître si le groupe dérivé de $S_1$, $S_2$, $S_3$ est discontinu, on calculera les points doubles $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$, $d$, $d'$, et les multiplicateurs $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$ de $S_1$, $S_2$, $S_3$ et de leur combinaison $S_4$ et on recherchera si ces quantités satisfont aux inégalités (5) et si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des parties aliquotes de $2\pi$.

Supposons maintenant que l'hexagone *abcdef* ne soit plus de la 1[ère], mais de la 2[e] famille et du 1[er] ordre de cette famille, de telle façon que les quantités *abcdef* soient réelles. Ces quantités devront satisfaire aux inégalités (3), pour que l'hexagone *abcdef* soit convexe. Les substitutions $S_1$, $S_2$, $S_3$ s'écriront:

$$S_1 = \left(\frac{1}{z-b}, \ \frac{1}{z-b} + \frac{1}{c-b} - \frac{1}{a-b}\right)$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{z-d}, \ \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{z-f}, \ \frac{1}{z-f} + \frac{1}{a-f} - \frac{1}{e-f}\right).$$

Si nous exprimons que la combinaison $S_4$ de $S_1$, $S_2$, $S_3$ est une substitution parabolique, nous trouverons que les quantités *abcdef* satisfont

à l'égalité (4). Cette égalité jointe aux inégalités (3) est la condition pour que le groupe dérivé de $S_1$, $S_2$, $S_3$ soit discontinu.

### 4e EXEMPLE.

Comme 4e exemple nous prendrons un quadrilatère *abcd*, dont les côtés opposés *ab*, *cd* et *bc*, *da* sont conjugués; les quatre sommets forment un seul cycle et la somme des angles $\Sigma$ est une partie aliquote de $2\pi$. Ce quadrilatère engendre un groupe de la 1ère famille et du genre 1. Joignons deux sommets opposés *bd* par un arc de cercle ayant son centre sur $X$. Nous obtiendrons ainsi un triangle *abd* sur les côtés duquel nous marquerons trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, le premier sur *bd*, le second sur *da*, le troisième sur *ab* et de telle façon que:

$$(b, \alpha) = (\alpha, d) \qquad (d, \beta) = (\beta, a) \qquad (a, \gamma) = (\gamma, b).$$

Il existera alors une substitution $S_1$ qui change $\alpha b$ en $\alpha d$, une autre $S_2$ qui change $\beta d$ en $\beta a$ et une autre $S_3$ qui change $\gamma a$ en $\gamma b$; toutes trois auront pour multiplicateur $-1$. Le groupe dérivé de $S_1$, $S_2$, $S_3$ sera discontinu et aura pour polygone générateur l'hexagone $b\alpha d\beta a\gamma$ dont les côtés $b\alpha$, $\alpha d$; $d\beta$, $\beta a$; $a\gamma$, $\gamma b$ sont conjugués et situés dans le prolongement l'un de l'autre. C'est donc un cas particulier des groupes engendrés par un hexagone *abcdef* et étudiés dans la remarque relative à l'exemple précédent.

Les substitutions fondamentales du groupe engendré par le quadrilatère *abcd*, sont $S_5$ qui change *ab* en *dc* et $S_6$ qui change *bc* en *ad*, et il est aisé de voir que $S_5$ est la combinaison de $S_3$ et de $S_1$; $S_6$ est la combinaison de $S_2$ et de $S_1$; d'où la règle suivante pour former tous les groupes fuchsiens dérivés d'un quadrilatère tel que *abcd*:

On prendra trois substitutions $S_1$, $S_2$, $S_3$ de multiplicateur $-1$ et satisfaisant aux conditions énoncées dans la remarque relative à l'exemple précédent; on combinera $S_3$ et $S_1$, ainsi que $S_2$ et $S_1$ et on aura les substitutions fondamentales du groupe cherché.

## § 12. **Généralisation.**

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les substitutions étaient réelles; mais une première généralisation peut être faite immédiatement.

Soit

(1) $$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

une substitution réelle quelconque; et faisons-lui correspondre la substitution:

(2) $$\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{\alpha \dfrac{az+b}{cz+d}+\beta}{\gamma \dfrac{az+b}{cz+d}+\delta}\right)$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des constantes imaginaires quelconques. Supposons que nous donnions à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des valeurs fixes et que l'on fasse parcourir aux quatre quantités $a$, $b$, $c$, $d$ toutes les valeurs réelles telles que $ad-bc=1$. Il est clair que les substitutions (2) formeront un groupe; et ce groupe jouira des propriétés suivantes:

1° Ses substitutions n'altèreront pas le cercle dont l'équation est:

$$\text{partie imaginaire de } \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=0$$

et que j'appellerai cercle fondamental.

2° Le transformé d'un point $z$ par une des substitutions (2) sera intérieur ou extérieur au cercle fondamental selon que le point $z$ sera lui-même intérieur ou extérieur à ce cercle.

Nous supposerons par exemple que si $z$ est au-dessus de $X$, le point $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ sera intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que l'on égale successivement les coëfficients de (1) à ceux des diverses substitutions d'un groupe fuchsien $G$. On obtiendra ainsi une infinité de substitutions (2) qui formeront un groupe $G'$, et ce groupe sera évidemment discontinu. A ce groupe $G$ correspondra une décomposition de la partie du plan située au-dessus de $X$ en une infinité de polygones normaux $R_0$, $R_1$, . . . . . . $R_i$ tous congruents entre eux. Supposons que $z$ parcoure l'un de ces polygones $R_i$ dont les côtés sont on l'a vu, ou bien des segments de $X$ ou bien des arcs de cercle ayant leurs centres sur $X$; le point $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ parcourra de son côté un certain polygone $S_i$ dont les côtés seront, ou bien des arcs du cercle fondamental, ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Ainsi de même qu'au groupe $G$ correspondait une division de la partie du plan située au-dessus de $X$ en une infinité de polygones nor-

maux congruents; de même au groupe $G'$ correspondra une division de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux congruents, à la condition d'adopter les dénominations suivantes:

Un polygone normal est un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs du cercle fondamental ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Deux figures seront congruentes si l'on passe de l'une à l'autre par une substitution telle que (2), c'est-à-dire par une substitution qui conserve le cercle fondamental. Tout ce qu'on a dit de la distribution des côtés en paires et des sommets en cycles, et de la classification des polygones normaux en familles, en ordres et en genres, reste vrai comme dans le cas particulier auquel nous nous étions restreints jusqu'ici.

Quelles seront maintenant les conditions pour qu'un polygone normal donne naissance à un groupe discontinu $G'$? Ce seront les mêmes conditions que nous avons trouvées dans le cas particulier des groupes de substitutions réelles, mais l'énoncé de ces conditions doit être convenablement modifié.

1° La somme des angles des divers sommets correspondants à un même cycle doit être une partie aliquote de $2\pi$.

2° Si $ab$ et $cd$ sont deux côtés conjugués; on devra avoir comme dans le cas des substitutions réelles:

$$\frac{a-b}{a-b'}\frac{a'-b'}{a'-b}=\frac{c-d}{c-d'}\frac{c'-d'}{c'-d};$$

mais $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ ne désigneront plus les quantités imaginaires conjuguées de $a$, $b$, $c$, $d$, mais les symétriques de $a$, $b$, $c$, $d$ par rapport au cercle fondamental (voir la définition du § 7). En d'autres termes si $\alpha$ est le centre du cercle fondamental et $\rho$ son rayon:

$$a' = \alpha + \text{imaginaire conjuguée de } \frac{\rho^2}{a-\alpha}$$

et de même pour $b'$, $c'$, $d'$.

Nous appellerons groupes fuchsiens les groupes discontinus tels que $G'$; car ils ne diffèrent pas essentiellement des groupes de substitutions réelles et nous réserverons le nom de groupes Kleinéens à ceux des groupes dont les substitutions ne conservent pas un même cercle fondamental. Nous ferons de ces groupes l'objet d'un mémoire spécial.

Les particularités qui peuvent se présenter sont les mêmes que pour les groupes correspondants de substitutions réelles;

Si le polygone générateur $R_0$ est du 2[d] ordre de la 2[e], de la 4[e], de la 6[e] ou de la 7[e] familles, l'ensemble des polygones $R_i$ ne recouvrira pas tout l'intérieur du cercle fondamental mais l'intérieur d'un certain domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement ce cercle.

Si le polygone $R_0$ est de la 3[e], de la 4[e], de la 5[e] ou de la 7[e] familles, il a des côtés de la 2[e] sorte. Nous avons vu au commencement du § 8 que dans ce cas il y a avantage à adjoindre à chaque polygone $R_i$ son symétrique $R'_i$ par rapport à $X$; de telle façon que le plan tout entier se trouve divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$ limitées par une ou plusieurs périphéries séparées. Dans le cas qui nous occupe maintenant, nous adjoindrons à chaque polygone $R_i$ son symétrique $R'_i$ par rapport au cercle fondamental, de telle façon que le plan tout entier va se trouver encore divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$.

Laissons de côté pour le moment les régions que nous venons d'appeler $R'_i$ et ne nous occupons que des polygones $R_i$ eux-mêmes. La somme des surfaces de ces polygones, tous intérieurs au cercle fondamental, sera *finie*, ce qui est très important au point de vue des applications ultérieures. Il y aurait exception lorsque le cercle fondamental se réduit à une droite ce qui arrive en particulier dans le cas des groupes de substitutions réelles; mais comme on l'a vu au commencement de ce paragraphe, un changement linéaire de variable suffirait pour ramener au cas général.

Dans mes travaux ultérieurs, je supposerai pour fixer les idées que le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Si l'on n'était pas placé dans ce cas, un changement très-simple de variable y ramènerait aisément.

## § 13. Historique.

Le premier exemple de groupe discontinu formé de substitutions linéaires est celui que l'on rencontre en étudiant le module $k$ d'une fonction elliptique (notation habituelle) ou le module $J$ (notation de M. Klein) considérés comme fonctions du rapport des périodes. M. Hermite a fait une étude approfondie de cette sorte de transcendante et, en montrant qu'elle était uniforme, il faisait voir du même coup que le groupe correspondant était discontinu.

Les fonctions $k$ et $J$ ont été dans la suite, ainsi que le groupe dis-

continu correspondant, étudiées par MM. Dedekind, Fuchs et Klein et plus récemment par M. Hurwitz. Nous citerons en particulier les importants travaux de M. Klein que l'on trouve dans les *Mathematische Annalen* et un remarquable mémoire de M. Fuchs inséré au Tome 83 du Journal de Crelle.

Il est évident qu'un groupe quelconque $G$ en contient une infinité d'autres qui seront tous discontinus, si le groupe $G$ l'est lui-même; de sorte que la connaissance d'un seul groupe discontinu permet d'en former très-aisément une infinité d'autres. C'est cette remarque qui est le point de départ des belles recherches de M. Klein sur la transformation des fonctions elliptiques et sur les fonctions modulaires en général.

Outre ces groupes contenus dans le groupe modulaire dont la discontinuité était évidente, il y a encore un autre groupe dont la discontinuité avait été remarquée par M. Schwarz dans un mémoire inséré au Tome 75 du Journal de Crelle; c'est l'exemple I du § 7. C'était la première fois qu'on arrivait à un pareil résultat sans prendre pour point de départ la théorie des fonctions elliptiques. Enfin M. Fuchs reprit une question analogue dans des travaux insérés au Tome 89 du Journal de Crelle et dans les Actes de la Société de Göttingen. Bien que les groupes étudiés dans ce dernier travail se ramenassent tous à des groupes déjà connus, c'est la lecture de ce remarquable mémoire qui m'a guidé dans mes premières recherches et qui m'a permis de trouver la loi de génération des groupes fuchsiens et d'en donner une démonstration rigoureuse.

Je l'ai donnée d'abord dans un mémoire que j'eus l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des Sciences dans le concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques du 1er Juin 1880 et j'ai poursuivi l'étude des groupes dans une série de travaux insérés aux Comptes Rendus de l'année 1881.

Le mode de représentation que j'ai employé, c'est à dire la division d'une portion du plan en une infinité de polygones curvilignes, peut être très utile pour l'étude des propriétés générales d'un groupe; c'es tce que j'ai cherché à faire voir. Aux géomètres qui désireraient poursuivre dans cet ordre d'idées l'étude d'un groupe fuchsien ou de tout autre groupe, je recommanderai la lecture de l'Habilitationsschrift de M. Walther Dyck de l'université de Leipzig, qui emploie un mode de représentation analogue et en fait ressortir les nombreux avantages.

---

# ZUR THEORIE DER LEIBRENTEN.

VON

C. J. MALMSTEN.

*Bezeichnungen.*

(1) $W(x_k; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, welche gegenwärtig das Alter $x_k$ hat, am Ende des $i^{ten}$ der von jetzt an gezählten Jahre noch lebt.

(2) $W(x_1, x_2, .. x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass $n$ Personen, welche gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, ... x_n$ haben, am Ende des $i^{ten}$ der von jetzt an gezählten Jahre *alle* noch leben.

Hier und überhaupt im Folgenden wird vorausgesetzt, dass für alle Personen eine und dieselbe Lebenstabelle gilt.

(3) ${}^vW(x_1, x_2, .. x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass von $n$ Personen, welche gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ haben, am Ende des $i^{ten}$ der von jetzt an gezählten Jahre wenigstens $v$ Personen noch leben.

(4) $P(x_1, x_2, x_3, .. x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem $n$ bestimmte Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, .... x_n$ haben, *alle* noch leben.

(5) ${}^{v}P(x_1, x_2, .. x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von $n$ bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ haben, wenigstens $v$ Personen noch leben.

---

## § 1.

In der Darstellung des Gegenstandes dieses Aufsatzes werden wir einen Lehrsatz benutzen, auf den wir, um nachher nicht die Reihenfolge in der Entwickelung zu unterbrechen, gleich zu Anfang die Aufmerksamkeit lenken wollen. Dieser Satz lautet so:

*Es möge $W(i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass ein gewisser Zustand bis zum Schluss des $i^{ten}$ Jahres stattfindet; ferner mögen*

(6) $$w_1(i),\ w_2(i),\ w_3(i), \ldots \text{etc.}$$

*die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, dass gewisse andere beziehungsweise Zustände bis zum Schluss desselben $i^{ten}$ Jahres stattfinden; endlich mögen*

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots. \text{etc.}$$

*die gegenwärtigen Werthe von den Jahresrenten bezeichnen, welche jede mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden sollen, an welchem die resp. Zustände noch stattfinden, die den zu Eingang dieses Satzes und unter (6) genannten Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Ist nun*

(7) $$W(i) = a_1 w_1(i) + a_2 w_2(i) + a_3 w_3(i) + \ldots \text{etc.}$$

*so ist auch*

(8) $$P = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \ldots \text{etc.}$$

Der Beweis folgt daraus, dass nach der Definition einer Jahresrente allgemein die Formel

$$P_k = \mathop{\mathrm{S}}_{i=1} \frac{w_k(i)}{r^i}, \qquad \left[r = 1 + \frac{\text{Procentzahl}}{100}\right]$$

gilt, mit deren Anwendung man die Gleichung (8) aus (7) unmittelbar erhält.

## § 2.

Für alle Lebensrenten- und Lebensversicherungs-Fragen, bei welchen das Leben nur eines Einzigen in Betracht kommt, ist es der Werth der *einfachen Lebensrente,* der vor Allem als bekannt vorausgesetzt wird; und die Lösung eines dahingehörenden Problems wird als gefunden betrachtet, wenn man einen Ausdruck hergestellt hat, der neben andern bekannten Grössen nur die einfache Lebensrente enthält.

Dieselbe Rolle, welche die einfache Lebensrente einnimmt, wenn es sich um ein einzelnes Leben handelt, behauptet nun die (unter 4 der Bezeichnungen definirte) Function $P(x_1, x_2, .. x_n)$ bei den auf verbundene oder combinirte Leben sich beziehenden Fragen.

Auch hier wird eine Lösung als gefunden betrachtet, sobald man einen Ausdruck aufgestellt hat, welcher allein Lebensrenten von der Art wie $P(x_1, x_2, .. x_n)$ enthält.

Das Problem, mit dessen Lösung wir uns hier in dieser kleinen Abhandlung beschäftigen werden, ist von einer so umfassenden Allgemeinheit, dass darin die Lösung einer grossen Menge von Fragen inclusive liegt, welche die Lebensrenten für combinirte Leben betreffen.

Dies Problem ist das folgende:

*Den Werth von*

$${}^{v}P(x_1, x_2, .. x_n)$$

*zu bestimmen, nemlich (wie in Nr 5 der Bezeichnungen) den gegenwärtigen Werth von einer Lebensrente, welche mit 1 Mark an einem jeden solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von n bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, .. x_n$ haben, wenigstens v Personen noch leben.*

## § 3.

Wir werden nun zuerst (Nr 3)

$$^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i)$$

zu bestimmen suchen, nemlich die Wahrscheinlichkeit, dass von $n$ bestimmten Personen, welche gegenwärtig das Alter $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, am Schlusse des $i^{ten}$ der von jetzt an gezählten Jahre, wenigstens $v$ Personen noch leben.

Offenbar ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | der Wahrscheinlichkeit | dass | $n$ | Personen | leben | und | 0 | todt | ist |
| + | d:o | » | $n-1$ | » | » | » | 1 | » | » |
| + | d:o | » | $n-2$ | » | » | » | 2 | » | sind |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| + | d:o | » | $k$ | » | » | » | $n-k$ | » | » |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| + | d:o | » | $v$ | » | » | » | $n-v$ | » | » |

Mit Hülfe der Bezeichnungen (1) wird nun die Wahrscheinlichkeit, dass gerade diejenigen $k$ Personen, welche gegenwärtig das Alter $x_1, x_2, \ldots x_k$ haben, noch den $i^{ten}$ Jahresschluss erleben, dass aber dann die übrigen $n-k$ Personen gestorben sind, durch

$$W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_k; i) \,.\, (1 - W(x_{k+1}; i)) \,.\, (1 - W(x_{k+2}; i)) \ldots (1 - W(x_n; i))$$

ausgedrückt, und folglich die Wahrscheinlichkeit, dass irgendwelche $k$ Personen unter den $n$ Personen, die gegenwärtig das Alter $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, noch den $i^{ten}$ Jahresschluss erleben, während die übrigen $n-k$ Personen gestorben sind, durch

$$\sum W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_k; i) \,.\, (1 - W(x_{k+1}; i)) \,.\, (1 - W(x_{k+2}; i)) \ldots (1 - W(x_n; i))$$

worin mit $\sum$ die Summe aller derjenigen Ausdrücke bezeichnet ist, welche man erhält, wenn man in dem Producte unter dem Summationszeichen alle möglichen $k$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausführt.

Wir finden demnach ohne Schwierigkeit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit (3) folgenden Ausdruck:

(9) $$ {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i) = $$

$$ = \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_k; i) \,.\, (1 - W(x_{k+1}; i))(1 - W(x_{k+2}; i)) \ldots (1 - W(x_n; i)). $$

Nun ist klar, dass der Ausdruck auf der zweiten Seite dieser Gleichung symmetrisch in Bezug auf $x_1, x_2 \ldots x_n$ sein, und aus Gliedern von der Form

$$ z_s \,.\, \sum W(x_1; i)\, W(x_2; i) \ldots W(x_s; i) $$

bestehen muss, worin

$$ s = v, \quad v + 1, \quad v + 2, \ldots n, $$

$z_s$ = einem noch zu bestimmenden Zahlenfactor wird, und

$$ \sum W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_s; i) $$

in Übereinstimmung mit dem zuvor Gesagten die Summe aller $s$-gliedrigen Producte, welche man aus

$$ W(x_1; i), \quad W(x_2; i), \ldots W(x_s; i) \ldots W(x_n; i) $$

bilden kann.

Wir haben also gefunden

(10) $$ {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{s=v}^{s=n} z_s \sum W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_s; i) $$

oder, wenn wir

$v + p$ statt $s$ und $z_p(v)$ statt $z_{v+p}$

einführen:

(10a) $$ {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_{v+p}; i) $$

und mit Benutzung der Bezeichnung (2)

$$ W(x_1; i) \,.\, W(x_2; i) \ldots W(x_{v+p}; i) = W(x_1, x_2, \ldots x_{v+p}; i) $$

folglich auch:

$$ {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1, x_2, \ldots x_{v+p}; i). $$

Hieraus ergibt sich mit Hülfe des in § 1 bewiesenen Satzes unmittelbar:

$$(11) \qquad {}^{v}P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, \sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$$

worin

$$\sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$$

die Summe derjenigen Ausdrücke bezeichnet, welche man erhält, wenn man in $P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$ alle möglichen $(v+p)$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einführt.

## § 4.

Es erübrigt jetzt nur noch den Werth von $z_p(v)$ zu bestimmen, welches auf folgende Weise geschehen kann.

Wenn wir zur Abkürzung

$$(12) \qquad \sigma_{v+p} = \sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$$

setzen, so erhalten wir

$$(13) \qquad {}^{v}P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, \sigma_{v+p}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Grössen $x$ nach der Reihenfolge des Eintritts des Todes der $n$ Personen geordnet seien, so dass die Person vom Alter $x_n$ die erste ist, welche stirbt,

» » $x_{n-1}$ » nächstfolgende » » »
» » $x_{n-2}$ » » » » »
. . . . . . . . . . . . . . . . .
» » $x_{v+p}$ die nach $x_{v+p+1}$ folgende ist, welche stirbt,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

und endlich
die vom Alter $x_{v+1}$ die letzte Person, die innerhalb der Zeit stirbt, während welcher die Leibrente ausbezahlt wird. Nach dem Tode der Person, welche gegenwärtig das Alter $x_v$ hat, endigt die Leibrente.

Wir wollen ferner

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| die Zeit, während welcher | $x_n$ noch | lebt, die | $0^{te}$ | Periode |
| » » » » | $x_{n-1}$ aber nicht $x_n$ | » » | $1^{te}$ | » |
| » » » » | $x_{n-2}$ aber nicht $x_{n-1}$ | » » | $2^{te}$ | » |
| . . . . | . . | . . | . | . |
| » » » » | $x_{n-s}$ aber nicht $x_{n-s+1}$ | » » | $s^{te}$ | » |
| . . . . | . . | . . | . | . |
| » » » » | $x_{v+p}$ aber nicht $x_{v+p+1}$ | » » | $(n-v-p)^{te}$ | » |
| . . . . | . . | . . | . | . |
| » » » » | $x_v$ aber nicht $x_{v+1}$ | » » | $(n-v)^{te}$ | » |

nennen, und mit

(14) $$e_0,\ e_1,\ e_2, \ldots\ldots e_s$$

die gegenwärtigen Werthe von je 1 Mark, welche an den, in die resp.

$$0^{te},\ 1^{te},\ 2^{te}, \ldots\ldots s^{te}$$

Periode fallenden, Jahres-Schlüssen ausbezahlt werden soll. Da nun (Bezeichn. 5)

$$^{v}P\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

nichts anderes ist als der gegenwärtige Werth von je 1 Mark, die an einem jeden solchen Jahres-Schlusse ausbezahlt werden soll, an welchem wenigsten $v$ von den $n$ Personen, die gegenwärtig resp. das Alter $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, noch leben, so kann man dafür auch sagen: an einem jeden Jahres-Schlusse, der in die

$0^{te}$, $1^{te}$, $2^{te}$ bis einschliesslich in die $(n-v)^{te}$

Periode fällt, und findet dadurch unmittelbar

(15) $$^{v}P\,(x_1, x_2 \ldots x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s.$$

Wir können aber für dieselbe Grösse (5) auch einen anderen Ausdruck aufstellen, dessen Vergleichung mit (15) uns ohne Schwierigkeit die Unbekannte $z_p(v)$ in (11) bestimmen lässt.

Da $P\,(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$ den gegenwärtigen Werth von je 1 Mark bedeutet, welche an einem jeden solchen Jahres-Schlusse ausbezahlt werden

soll, an welchem die $v+p$ Personen, die jetzt das Alter $x_1, x_2, \ldots x_{v+p}$ haben, *alle* noch leben, so können wir die Summe der Ausdrücke, die man aus

$$P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p})$$

erhält, indem man die $v+p$ Grössen durch alle $(v+p)$-gliedrige Combinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ersetzt, auch in folgender Form darstellen:

$\sum P(x_1, x_2, \ldots x_n) =$ dem gegenwärtigen Werthe von der Anzahl von je $a_p(0)$ Mark, welche an jedem in die $0^{te}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange $x_n$ noch lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ » » » » $a_p(1)$ Mark, welche an jedem in die $1^{ste}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange $x_{n-1}$ aber nicht $x_n$ lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ » » » » $a_p(2)$ » welche an jedem in die $2^{te}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange $x_{n-2}$ aber nicht $x_{n-1}$ lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ . . . . . . . . . . . . . .

$+$ » » » » $a_p(s)$ » welche an jedem in die $s^{te}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange $x_{n-s}$ aber nicht $x_{n-s+1}$ lebt, ausbezahlt werden soll;

$+$ . . . . . . . . . . . . . .

$+$ » » » » $a_p(n-v-p)$ » welche an jedem in die $(n-v-p)^{te}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse, das heisst so lange $x_{v+p}$ aber nicht $x_{v+p+1}$ lebt, ausbezahlt werden soll.

Diese Gleichung erhält, unter Benutzung der soeben ihrer Bedeutung nach festgesetzten $e_s$, die Gestalt

(16) $$\sum P(x_1, x_2, \ldots x_{v+p}) = \sigma_{v+p} = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v-p} e_s \,.\, a_p(s).$$

Was nun $a_p(s)$ betrifft, oder die Anzahl von Mark, welche an jedem in die $s^{te}$ Periode fallenden Jahres-Schlusse (das heisst so lange $x_{n-s}$ aber nicht $x_{n-s+1}$ lebt) ausbezahlt werden soll, so ist ohne Schwierigkeit zu ersehen, dass diese Anzahl = ist der Anzahl der $(v+p)$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Vertauschung der in dieser Periode noch lebenden $n-s$ Personen vom Alter $x_1, x_2 \ldots . x_{n-s}$; also wird

(17) $$a_p(s) = (n-s)_{v+p} = \frac{(n-s)(n-s-1) \ldots . (n+1-s-v-p)}{1.2 \ldots \ldots (v+p)},$$

welches in (16) eingeführt

$$\sigma_{v+p} = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v-p} e_s \,.\, (n-s)_{v+p}$$

ergibt, oder auch, was dasselbe ist,

(18) $$\sigma_{v+p} = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, (n-s)_{v+p},$$

weil $(n-s)_{v+p} = 0$ wird für $s > n-v-p$.

Setzt man diesen Werth von $\sigma_{v+p}$ in (13) ein, so erhält man

$$^vP(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, (n-s)_{v+p}$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p};$$

diese, mit (15) verglichen, ergibt

$$\mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s = \mathop{\mathrm{S}}_{s=0}^{s=n-v} e_s \,.\, \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p},$$

und folglich

$$1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p},$$

oder, weil

$$(n-s)_{v+p} = 0 \text{ für } p > n-v-s \text{ wird,}$$

$$1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v-s} z_p(v) \,.\, (n-s)_{v+p},$$

welche Formel auch so

(19) $$1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v-s} z_p(v) \,.\, (n-s)_{n-v-s-p}$$

geschrieben werden kann, und für alle die Werthe

$$s = 0,\ 1,\ 2, \ldots . n-v$$

gilt. Setzt man hierin

$$n-v-s \text{ statt } s,$$

so erhält man

(20) $$1 = \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=s} z_p(v) \,.\, (s+v)_{s-p},$$

das heisst

(21) $$1 = (s+v)_s \,.\, z_0(v) + (s+v)_{s-1} \,.\, z_1(v) + \ldots . + (s+v)_1 \,.\, z_{s-1}(v) + (s+v)_0 \,.\, z_s(v)$$

für alle Werthe $s = 0,\ 1,\ 2, \ldots . n-v$.

Mit Rücksicht darauf, dass für $s = 0$

(22) $$1 = z_0(v)$$

wird, hat man also zur Bestimmung des $z_p(v)$ folgendes System von Gleichungen:

$$1 = (v+1)_1 + (v+1)_0 \,.\, z_1(v)$$

$$1 = (v+2)_2 + (v+2)_1 \,.\, z_1(v) + (v+2)_0 \,.\, z_2(v)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$1 = (v+k)_k + (v+k)_{k-1} \,.\, z_1(v) + (v+k)_{k-2} \,.\, z_2(v) + \ldots + (v+k)_0 \,.\, z_k(v)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(23) $$1 = (n-1)_{n-v-1} + (n-1)_{n-v-2} \,.\, z_1(v) + (n-1)_{n-v-3} \,.\, z_2(v) + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)_{n-v-k-1} \,.\, z_k(v) + \ldots + (n-1)_0 \,.\, z_{n-v-1}(v)$$

(24) $$1 = (n)_{n-v} + (n)_{n-v-1} \,.\, z_1(v) + (n)_{n-v-2} \,.\, z_2(v) + \ldots + (n)_{n-v-k} \,.\, z_k(v) + \ldots$$
$$\ldots + (n)_1 \,.\, z_{n-v-1}(v) + (n)_0 \,.\, z_{n-v}(v).$$

Unter Benutzung der allgemein bekannten, für die Binomial-Coëfficienten geltenden Gleichung

$$(m+1)_r - m_r = m_{r-1}, \tag{25}$$

erhält man, durch Subtraction der Formel (23) von (24),

$$0 = (n-1)_{n-v} + (n-1)_{n-v-1} \cdot z_1(v) + \ldots + (n-1)_1 \cdot z_{n-v-1}(v) + (n-1)_0 \cdot z_{n-v}(v). \tag{26}$$

Lassen wir in dieser Gleichung $v$ in $v+1$ übergehen, ziehen dann die Gleichung (23) ab, und wenden die gebräuchliche Bezeichnung

$$z_k(v+1) - z_k(v) = \Delta z_k(v)$$

an, so finden wir

$$\begin{aligned} -1 = (n-1)_{n-v-2} \cdot \Delta z_1(v) + \ldots + (n-1)_{n-v-k} \cdot \Delta z_{k-1}(v) + \ldots \\ \ldots + (n-1)_1 \cdot \Delta z_{n-v-1}(v) + (n-1)_0 \cdot \Delta z_{n-v}(v). \end{aligned} \tag{27}$$

Dadurch, dass man in (23) statt $v$ nun $v+1$ setzt und das Resultat zu (27) addirt, erhält man (weil $z_0(v) = 1$)

$$\begin{aligned} 0 = (n-1)_{n-v-2}[z_0(v+1) + \Delta z_1(v)] + (n-1)_{n-v-3}[z_1(v+1) + \Delta z_2(v)] + \ldots \\ \ldots + (n-1)_{n-v-k-1}[z_{k-1}(v+1) + \Delta z_k(v)] + \text{ etc.} \end{aligned}$$

Man hat folglich allgemein

$$z_{k-1}(v+1) + \Delta z_k(v) = 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$z_k(v) = -\sum z_{k-1}(v+1). \tag{28}$$

Wenn man $v = 0$ in (21) setzt und (22) berücksichtigt, so erhält man

$$0 = s_{s-1} \cdot z_1(0) + s_{s-2} \cdot z_2(0) + \ldots + s_1 \cdot z_{s-1}(0) + z_s(0);$$

und weil diese Formel für

$$s = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

gelten soll, so findet man allgemein

$$z_k(0) = 0,$$

und in Folge hiervon muss man in (28) das Integral $\sum z_{k-1}(v+1)$ so nehmen, dass es für $v = 0$ verschwindet.

Mit Hülfe der bekannten Formel für die Binomial-Coëfficienten

$$\sum (v+k)_{s-1} = (v+k)_s$$

erhält man nach und nach aus (28)

$$z_1(v) = -\sum(1) = (-1)^1 . (v)_1$$

$$z_2(v) = (-1)^2 . \sum (v+1)_1 = (-1)^2 . (v+1)_2$$

$$z_3(v) = (-1)^3 . \sum (v+2)_2 = (-1)^3 . (v+2)_3$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(29) $$z_p(v) = (-1)^p . \sum (v+p-1)_{p-1} = (-1)^p . (v+p-1)_p.$$

Diese Bestimmung für $z_p(v)$ in (11) eingesetzt ergibt für den gesuchten Lebensrenten-Werth folgenden Ausdruck:

(30) $${}^vP(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathop{S}_{p=0}^{p=n-r} (-1)^p . (v+p-1)^p . \sum P(x_1, x_2, \ldots x_{r+p}),$$

worin mit

$$\sum P(x_1, x_2, \ldots x_{r+p})$$

die Summe von denjenigen Functionen bezeichnet ist, die man aus $P(x_1, x_2, \ldots x_{r+p})$ erhält, wenn man darin alle möglichen $(v+p)$-gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einsetzt.

Ex. 1. Für $n = 2$, $v = 1$ finden wir unmittelbar

$${}^1P(x_1, x_2) = P(x_1) + P(x_2) - P(x_1, x_2).$$

Ex. 2. Für $n = 3$, $v = 1$ ist

$${}^1P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) - [P(x_1, x_2) + P(x_1, x_3) + P(x_2, x_3)] + P(x_1, x_2, x_3)$$

Ex. 3. Für $n = 3$, $v = 2$ finden wir

$${}^2P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2) + P(x_1, x_3) + P(x_2, x_3) - 2 . P(x_1 x_2 x_3).$$

*Nachschrift.*

Herr Prof. *Ernst Schering* in Göttingen hat mir gelegentlich eine andere Form der Bestimmung der Grössen $z_p(v)$ in der Gleichung (11) mitgetheilt. Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe:

*In der Gleichung* (*10 a*), *mit* (*9*) *verglichen, nemlich*

$$(31)\qquad {}^{v}W(x_1, x_2, \ldots x_n; i) = \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) \ldots$$

$$\ldots W(x_k; i) . (1 - W(x_{k+1}; i)) . (1 - W(x_{k+2}; i)) \ldots (1 - W(x_n; i))$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) . \sum W(x_1; i) . W(x_2; i) \ldots\ldots W(x_{v+p}; i)$$

*die Coëfficienten $z_p(v)$ zu bestimmen.*

Zu dem Zwecke benutzen wir die folgende, nach Potenzen von $\theta$ geordnete Reihenentwickelung

$$(32)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{k=v}^{k=n} \sum_{\xi} t\, W(\xi_1; i) . t\, W(\xi_2; i) \ldots t\, W(\xi_k; i) . (1 + \theta W(\xi_{k+1}; i)) . (1 + \theta W(\xi_{k+2}; i)) \ldots$$

$$\ldots (1 + \theta W(\xi_n; i))$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} . \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v+p, \varphi) . t^{v+p-\varphi} . \theta^{\varphi} . \sum_{\xi} W(\xi_1; i) . W(\xi_2; i) \ldots W(\xi_{v+p}; i)$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{p=0}^{p=n-v} . Z(v, p, t, \theta) . \sum_{\xi} W(\xi_1; i) . W(\xi_2; i) \ldots W(\xi_{v+p}; i).$$

Hier ist zu bemerken:

1:o $\xi_1 \ldots\ldots \xi_k,\ \xi_{k+1} \ldots\ldots \xi_n$

sollen mit den Werthen $x_1 \ldots\ldots x_k,\ x_{k+1} \ldots\ldots x_n$,

abgesehen von der Reihenfolge, aber ohne Wiederholung zuzulassen, übereinstimmen.

2:o $\sum_{\xi}$ soll die Summation über alle solche Werthensysteme bedeuten, bei denen aber Platzveränderung weder der $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_k$ unter sich, noch der $\xi_{k+1}, \xi_{k+2} \ldots\ldots \xi_n$ unter sich zulässig ist.

3:o $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{v+p}$ sollen irgend welche $v + p$ der Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ bedeuten, aber ohne eine Wiederholung unter diesen zuzulassen.

4:o $\sum_{\xi}$ soll die Summation über alle solche Werthensysteme bedeuten, aber ohne eine Platzveränderung der Grössen $\xi$ zuzulassen, also die Summation über alle $(v + p)$-gliedrigen Combinationen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ ohne Wiederholung und ohne Versetzung.

5:o $C(v + p, \varphi)$ sind zu bestimmende ganze Zahlen-Coëfficienten, abhängig von $v + p$ und $\varphi$.

Es ist

$$Z(v, p, t, \theta) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v + p, \varphi) \,.\, t^{v+p-\varphi}\, \theta^{\varphi}$$

gesetzt, und es ist offenbar

(33) $$z_p(v) = Z(v, p, t, \theta) \text{ für } t = +1,\ \theta = -1.$$

Nun bedeutet $C(v + p, \varphi)$ augenscheinlich die Anzahl der mit dem Factor $t^{v+p-\varphi}\, \theta^{\varphi}$ versehenen Glieder, welche entstehen, wenn man in dem ersten Theil der Doppelgleichung (32) durch Multiplication die Klammer-Ausdrücke $(1 + \theta\, W(\xi_\lambda'\,; i))$ auflöst; also ist

$C(v + p, \varphi) =$ der Anzahl der $\varphi$-gliedrigen Combinationen, ohne Wiederholung und ohne Versetzung, von $v + p$ Elementen, das heisst

$$C(v + p, \varphi) = \frac{(v + p)(v + p - 1) \ldots (v + p + 1 - \varphi)}{1.2 \ldots \varphi} = (v + p)_{\varphi}.$$

daher

$$Z(v, p, t, \theta) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (v + p)_{\varphi} \,.\, t^{v+p-\varphi} \,.\, \theta^{\varphi},$$

und demnach

$$Z(v, p, t = 1, \theta = -1) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \,.\, (v + p)_{\varphi}$$

das heisst, zufolge (33),

$$z_p(v) = \mathop{\mathrm{S}}_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \,.\, (v + p)_{\varphi} = (-1)^{p} \,.\, (v + p - 1)_{p},$$

ebenso wie in Formel (29).

# EINE ANNÄHERUNGSMETHODE IM PROBLEME DER DREI KÖRPER.

VON

HUGO GYLDÉN.

Von dem Problem der drei Körper wird bekanntlich gesagt, dass es noch heut zu Tage ungelöst dasteht und mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmitteln nicht gelöst werden kann, wenn nämlich die Lösung im streng mathematischen Sinne aufgefasst wird. Ein derartiger Ausspruch erheischt jedoch eine genaue Fixirung dessen, was man unter »streng mathematisch» zu verstehen hat; denn sonst könnte die Meinung darüber schwankend werden, was die Wissenschaft in Bezug auf das besagte Problem bereits geleistet hat, und was von ihr in der nächsten Zeit erwartet werden darf.

Nennt man nur diejenige Lösung streng mathematisch, welche direct, d. h. ohne fortgesetzte Annäherungen zu den unbedingt geltenden Relationen zwischen der Zeit und den Coordinaten der drei Körper führt, so muss eingeräumt werden, dass wir bis jetzt gar keine Vorstellung davon haben, wie eine solche Lösung zu Stande gebracht werden soll, und dass die Hoffnung, diese demnächst zu erhalten, vorläufig als illusorisch bezeichnet werden muss. Der Ursache nachzuforschen und feststellen zu suchen, woher diese geringen Aussichten entspringen, ist aber nicht nur an und für sich nicht ohne Interesse, sondern für die zukünftige Leistungsfähigkeit der Wissenschaft auf dem Gebiete des betreffenden Problemes von grösster Bedeutung.

Die Beantwortung jener Frage wäre eine leichte, wollte man sich damit begnügen zu sagen, unsere analytischen Hülfsmittel sind gegen-

wärtig noch nicht in dem Maasse ausgebildet, dass wir mit ihnen die Schwierigkeiten des Problems der drei Körper bewältigen könnten. Eine Erklärung aber wäre hiermit nicht gegeben, sondern die Frage nur auf ein anderes Gebiet übergeführt, nämlich auf das der Metaphysik (der Mathematik). Tiefer liegt also der Grund jenes Unvermögens das Problem zu lösen, aber andrerseits doch erkenntlich genug um nachgewiesen werden zu können. Es dürfte nämlich kaum ernstlichem Widerspruch begegnen, wenn wir sagen, dass die Ursache, weshalb die Lösung des Problems der drei Körper uns so schwierig erscheint, einfach darin liegt, dass uns die Vorstellungen von den Bewegungserscheinungen in einem Systeme von mehr als zwei Körpern noch abgehen oder doch noch sehr wenig geläufig sind. Diese Bewegungserscheinungen sind aber auch voraussichtlich nicht in so einfacher Weise aus denen zusammen zu setzen, die wir in einem Systeme von zwei Körpern beobachten können — und die daher bereits eine Thatsache der Erfahrung sind — dass unser Geist, durch Synthese dieser einfacheren Elemente, sich unmittelbar in die Sphäre jener mehr zusammengesetzten Vorstellungen versetzen könnte.

Die Erscheinungen, die man seit 2000 Jahren im Planetensysteme beobachtete, und die zunächst ihren Ausdruck in den Kepler'schen Gesetzen gefunden haben, waren auch nicht die geeignetsten jene Vorstellungen auszubilden, aus welchen die für die directe Lösung des Problems der drei Körper vorauszusetzenden Begriffe hätten abstrahirt werden können. Im Planetensysteme ist nämlich der Einfluss der Planeten auf einander gegenüber dem der Sonne sehr gering, während Zeiträumen, die mit einem für uns anschaulichen Maasse übersichtlich gemessen werden können. Die Erscheinungen, die wir beobachtet haben, sind also nahezu dieselben, die man in einem Systeme von zwei Körpern beobachtet hätte, und schliessen sich während der historischen Zeit den Kepler'schen Gesetzen einigermassen an. Während Zeiträumen aber, die nach Jahrtausenden gezählt werden müssen, gestalten sich die Erscheinungen der Planetenbewegung wesentlich anders, und man kann wohl sagen, dass die Bahnen der Planeten durchschnittlich Kreisen ähnlicher sind als Kepler'schen Ellipsen, wenn nämlich die Elemente letzterer als konstant angenommen werden. Einem intelligenten Wesen, dem die Zeit eines Jahrtausends etwa vorkäme, wie uns ein Tag, würde die Kepler'sche Ellipse schwerlich wie eine Annäherung an die wirkliche Bahn vorkommen. Es würde nicht die zum Begreifen

des Problems der drei Körper erforderlichen Vorstellungen aus Elementen zusammen zu setzen suchen, die ihm die Bewegungen im Systeme von nur zwei Körpern darbieten. In der Natur unserer Existenzbedingungen liegt es also, dass die Vorstellungen, deren Vorhandensein eine Bedingung der Lösung des oben erwähnten Problemes ausmacht, noch nicht entwickelt sind; die mathematische Analyse hat daran wenig Schuld. Mittelst Analyse jedoch eine Erkenntniss erlangen zu wollen, wozu nicht schon vorher der Grund vom menschlichen Geiste erworben wäre, müsste als dem widersprechend erachtet werden, was uns die Theorie der Erkenntniss lehrt.

Die mathematische Analyse ist zunächst nur der Hebel, durch den die construirbaren Vorstellungen, die einen immanenten Character haben, in's Bewusstsein gebracht und zu Urtheilen verarbeitet werden. Ihre Leistung ist derjenigen der logischen Operationen aequivalent; nur verläuft die Kette der Schlussfolgerungen bei ersterer theilweise im Unbewussten, indem sie durch den mathematischen Mechanismus fortgeführt wird, während die logischen Schlüsse sämmtlich bewusst sind oder doch sehr leicht bewusst werden können.

Unsere Vorstellungswelt gründet sich ursprünglich auf Sinneswahrnehmungen, beziehungsweise Beobachtungen; und wie wir auch diese Welt erweitern, immer müssen wir in derselben Sensationen als Elemente wiederentdecken können. Eine Vorstellung, die nicht in der Sphäre des empirisch Gegebenen wurzelt, oder bei der empirische Elemente nicht nachweisbar sind, giebt es nicht. — Umgekehrt aber, können wir aus solchen Elementen doch unsere Vorstellungswelt erweitern, indem wir nämlich die erweiterten Begriffe mit Hülfe der Phantasie veranschaulichen, und bei einem solchen Processe ist wiederum die mathematische Analysis verwendbar, indem sie die Formulirung der Begriffserweiterungen erleichtert.

Erkennen wir nun diesen Weg zur Erweiterung unserer Kenntnisse im allgemeinen als einen wissenschaftlich berechtigten an — und ich wüsste nicht, wie derselbe zu vermeiden wäre — so handelt es sich darum, denselben für das jetzt in Frage stehende Problem zu verwerthen und überhaupt mathematisch zu bezeichnen. Die Synthese aber, welche aus einfacheren Vorstellungselementen zu mehr zusammengesetzten führt, entspricht genau dem Processe, durch den eine Function durch fortgesetzte

Annäherungen gebildet wird, wobei die einzelnen Resultate aus einfacheren, uns bereits bekannten Functionen zusammengesetzt sind. Es ist also der Weg der successiven Annäherungen, den wir verfolgen müssen, der uns aber keineswegs die Aussicht entzieht das Resultat einst in aller Strenge erhalten zu können; denn der Begriff der mathematischen Transcendenz, der diesem Wege im allgemeinen eigenthümlich ist, kann auf die resultirende Functionsform übertragen werden, die schliesslich auch das Resultat der directen Lösung sein muss.

Die vorhergehenden Betrachtungen können wir nun kurz folgendermaassen zusammenfassen: suchen wir eine *einfache* Lösung mittelst uns jetzt bekannter Functionsformen, so stellen wir uns jedenfalls eine widersinnige Aufgabe; wir müssen vielmehr unsern Geist dahin zu entwickeln suchen, dass die Lösung, die für uns einst erreichbar wird, einfach erscheint. Dieser Evolutionsprocess heisst, mathematisch gesprochen, das Anschaulichwerden neuer Functionsformen. — Nicht wie durch einen Zauberschlag oder durch eine unmittelbare Erkenntniss werden wir die Lösung des Problems der drei Körper erlangen, sondern auf einem Pfade, auf dem jeder Schritt nur mit Ueberwindung bedeutender Schwierigkeiten gethan werden kann.

Wenn wir also den Weg der successiven Annäherungen einschlagen, den einzigen auf dem wir gegenwärtig einige Aussicht haben, das betreffende Problem wenigstens in gewissen Fällen lösen zu können, so müssen wir dabei an zwei Bedingungen festhalten: erstens nämlich, dass die Folge der Annäherungen convergent sei, und zweitens, dass die Resultate dieser nie die Zeit, oder Kreisbögen, die mit der Zeit unbegränzt wachsen können, ausserhalb der periodischen Functionszeichen enthalten. Die Nothwendigkeit jene erste Bedingung zu stellen, leuchtet von selbst ein; der zweiten muss aber genügt werden, damit die Lösung eine wirklich unbedingte Gültigkeit habe und der vorausgesetzten Stabilität des Systems entspreche. — Eine jede Lösung, welche den gestellten Bedingungen genügt, nenne ich eine ***absolute Lösung,*** ohne Rücksicht auf welchem Wege dieselbe auch erlangt worden sei. Man erkennt aber leicht, dass es nur eine einzige absolute Lösung geben kann; so dass, wenn man dieselbe auch unter verschiedener Form findet, die eine aus der andern durch gehörige Entwicklung hervorgehen muss. Das Resultat, welches durch die Methode der successiven Annäherungen gefunden wird, muss

also mit dem identisch sein, was einst durch die directe Lösung hervorgehen wird.

Die Lösung des Problems der drei Körper im absoluten Sinne ist eigentlich nur von Lagrange und Laplace in's Auge gefasst worden; was seitdem auf dem Gebiete der Mechanik des Himmels geleistet wurde, ist zwar äusserst werthvoll und für die Astronomie fördernd gewesen; in Bezug auf den absoluten Character der Resultate aber kaum über die Arbeiten jener grossen Männer hinausragend. Von wie grossem Werthe diese Arbeiten aber auch gewesen sind — sie haben in der That doch unsere Vorstellungen über die Bewegungen der Planeten entwickelt — so sind sie doch keineswegs als endgültig anzusehen. Man erinnert sich z. B., dass die gefundenen Ausdrücke der Secularstörungen aus einer begränzten Anzahl von Gliedern bestehen, während diese Anzahl in der Wirklichkeit doch unendlich ist: auch lassen sich gegen die von den genannten Gelehrten aufgestellten Methoden, die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Functionszeichen zu eliminiren, Bedenken erheben, welche in der Bemerkung wurzeln, dass wenn einmal die Zeit als Factor in einem intermediären Resultate aufgetreten ist, so hat man möglicherweise das erste Glied einer nicht beständig convergenten Reihenentwicklung vor sich.

Seit einiger Zeit bin ich im Besitze einer Methode, die absolute Lösung des mehrerwähnten Problemes zu finden, welche, wenigstens auf die Untersuchung der Bewegungen in unserem Planetensystem angewendet, jedenfalls den beiden oben näher bezeichneten Bedingungen genügen dürfte. In dem Maasse jedoch, wie die Bahnen der einzelnen Körper des Systems mehr excentrisch werden und die Anziehungen der Hauptkraft im Werthe näher kommen, wird die Anwendung dieser Methode mehr und mehr mühsam, und es lässt sich eine solche Constitution des Systems denken, dass die Anwendbarkeit derselben völlig illusorisch wird. Es scheint, dass wir in der nächsten Zeit in solchen Fällen auf die absolute Lösung verzichten müssen und uns mit einer relativen, für eine begränzte Zeit geltenden begnügen. — Die erwähnte Methode beruht auf Principien, von denen ich einen Theil jetzt darzulegen mir erlauben werde.

Es handelt sich darum, gewisse Grössen aus Differentialgleichungen zu bestimmen, ohne dass in den Resultaten die unabhängige Veränderliche als Factor vorkommt, wiewohl sie als solcher erscheint, wenn man in der ersten Annäherung alle Grössen, welche mit der zweiten Potenz der stö-

renden Masse multiplicirt sind, bei Seite lässt. In den Differentialgleichungen, durch deren Integration man genäherte Werthe der Unbekannten findet, müssen daher vor allen Dingen gewisse Grössen zweiter Ordnung mitgenommen werden. Trotzdem lassen sich die meisten Gleichungen, welche bei der hier in Frage stehenden Untersuchung nach und nach vorkommen, auf die Form der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bringen, und die in diesen Gleichungen vorkommenden bekannten Functionen lassen sich innerhalb gewisser Gränzen willkürlich wählen. Eine solche Gleichung sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 y = X_0; \tag{1}$$

die Function $X_1$ wird als bekannt angenommen und besteht aus zwei Theilen, wovon der eine von der störenden Masse unabhängig ist, der zweite aber mit dieser Masse verschwindet. Die Function $X_0$ nehmen wir auch als bekannt an, aber nur in der ersten Annäherung; denn sie enthält im Allgemeinen Glieder der Form

$$\Psi_0 + \Psi_2 y^2 + \Psi_3 y^3 + \ldots.$$

und da $y$ als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird, und ebenso die Functionen $\Psi_0$, $\Psi_2, \ldots$, so vernachlässigen wir, wenn $X_0$ mit $\Psi_0$ identificirt wird, nur Grössen dritter Ordnung. Und wenn wir zu der angesetzten Reihe noch ein Glied $\Psi_1 y$ fügen, so ist $\Psi_1$, wenn auch nur mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt, doch aus andern Gründen so klein, dass das Product $\Psi_1 y$ zu den Grössen dritter Ordnung gezählt werden darf.

Indem die Function $\Psi_1$ als gewissermaassen von $X_1$ abgetrennt anzusehen ist, lässt sich letztere innerhalb gewisser Gränzen beliebig wählen, und ich werde bei der Bestimmung dieser Function der Bedingung zu genügen suchen, dass das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 y = 0 \tag{2}$$

die Form:

$$y = C_1 P + C_2 [Q + lxP] \tag{3}$$

annimmt. Hier bedeuten $C_1$ und $C_2$ die Integrationsconstanten, $P$ und $Q$ zwei Functionen von $x$, die nur periodische Glieder enthalten, und endlich $l$ eine zu unserer Verfügung stehende Constante.

Setzen wir:

$$y_1 = P; \quad y_2 = Q + lxP,$$

so müssen bekanntlich $y_1$ und $y_2$ der Bedingungsgleichung

$$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = \mu$$

genügen, wo $\mu$ eine neue Constante bezeichnet. Aus dieser Bedingungsgleichung lässt sich eine Relation zwischen $P$ und $Q$ herleiten, und es ergiebt sich

$$Q'P - P'Q + lPP = -\mu,$$

woraus folgt

$$Q = P\left\{C_3 - \int\left(\frac{\mu}{PP} + l\right)dx\right\},$$

indem $C_3$ die Integrationsconstante bezeichnet, die wir aber sofort gleich Null setzen können. — Damit nun $Q$ die angedeutete Eigenschaft besitze, nämlich kein Glied mit dem Factor $x$ zu enthalten, muss die Constante $l$ offenbar so gewählt werden, dass sie sich gegen das constante Glied in der Entwicklung von $\frac{\mu}{PP}$ aufhebt. Wir werden in der Folge die Constante $\mu$ gleich $+1$ oder gleich $-1$ setzen, wodurch die Allgemeinheit der Resultate offenbar nicht gemindert wird.

Dies vorausgesetzt, stellen wir das allgemeine Integral der Gl. (1) folgendermaassen auf

$$y = P\{C_1 - \int X_0 [Q + lxP]\, dx\} + [Q + lxP]\{C_2 + \int X_0 P dx\}$$

Weil aber

$$\int xX_0 P dx = x\int X_0 P dx - \int dx \int X_0 P dx,$$

so hat man auch

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 P + C_2 [Q + lxP] \\ & - P\int X_0 Q dx + Q\int X_0 P dx \\ & + lP\int dx \int X_0 P dx \end{aligned}$$

Durch die Aufstellung dieser Formel leuchtet die Absicht mit der gewählten Form der Differentialgleichung (1) sofort ein. Findet sich nämlich im Producte $X_0 Q$ oder in dem Integrale

$$\int X_0 P dx$$

ein constantes Glied, so erscheint im Resultate ein Glied von der Form

$$\gamma x P,$$

indem $\gamma$ einen numerischen Coefficienten bezeichnet. Dieses Glied bringt man aber unmittelbar zum Verschwinden, indem man die Integrationsconstante $C_2$ in geeigneter Weise bestimmt, die bei den Anwendungen der aufgestellten Integralformeln auf das Problem der drei Körper immer überzählig ist.

Das Product $X_0 P$ enthält entweder gar kein constantes Glied, oder doch nur ein solches von höherer Ordnung, und dies braucht bei der ersten Annäherung nicht mit berücksichtigt zu werden. Indem wir nun die Constante $C_2$ in der oben bezeichneten Weise bestimmen, die Constante $C_1$ aber vorläufig unbestimmt lassen, erhalten wir ein Resultat der Form

$$y = C_1 P + C_2 Q + \text{ per. Glieder;}$$

und wenn wir von $X_0$ nur die Glieder dritter Ordnung inclusive berücksichtigen, so haben wir

$$X_0 = \Psi_0 + \Psi_1 [C_1 P + C_2 Q + \ldots.]$$
$$+ \Psi_2 [C_1 P + C_2 Q + \ldots.]^2$$

und

$$X_0 P = \Psi_0 P + \Psi_1 P [C_1 P + C_2 Q + \ldots.] + \ldots.$$

In diesem Ausdrucke muss man nun suchen die Constante $C_1$ so zu bestimmen, dass kein constantes Glied daselbst nachbleibt. — Würde eine solche Bestimmung indessen nicht gelingen, so wäre hierdurch angezeigt, dass der Erscheinung, welche durch das Integrationsresultat representirt wird, die Stabilität mangelt. Bei der Anwendung der oben bezeichneten Integrationsmethode auf die Bewegungen der Planeten kommen derartige Hindernisse indessen nicht vor; denn, wie schon bemerkt wurde, das Product $X_0 Q$ enthält in der Regel kein constantes Glied, und wenn ein solches vorkommt, so lässt es sich in der angeführten Weise eliminiren.

Der Functionen $P$, welche dem oben bezeichneten Zwecke entsprechen, giebt es verschiedene. Die einfachsten und zugleich auch in anderer Beziehung geeigneten findet man unter den rationalen Verbindungen einfacher elliptischer Functionen. Wir entnehmen dieser zuerst die allereinfachsten Fälle, indem wir für $P$ der Reihe nach die Werthe $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ und $\operatorname{dn} x$ setzen; es ergeben sich alsdann für $Q$ und $l$

$$Q = \operatorname{sn} x \frac{H'(x)}{H(x)}; \quad l = -\frac{K - E}{K}$$

$$Q = \frac{\operatorname{cn} x}{k'^2} \frac{H'_1(x)}{H_1(x)}; \quad l = -\frac{k'^2 K - E}{k'^2 K}$$

$$Q = \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}; \quad l = \frac{E}{k'^2 K}$$

Die Resultate sind also sehr einfach und dabei in leichter Weise zu verwerthen; sie entsprechen, wie man leicht bemerkt, den Integralen der Lamé'schen Gleichungen:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2]\, y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 \quad ]\, y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 \quad - k^2]\, y = 0$$

In nächster Reihe werden wir für $P$ die Combinationen:

$$\frac{d \operatorname{sn} x}{dx} = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$

$$-\frac{d \operatorname{cn} x}{dx} = \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$

$$-\frac{1}{k^2} \frac{d \operatorname{dn} x}{dx} = \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$$

substituiren, und finden dann nach einigen Reductionen die folgenden Werthe der Grössen $Q$ und $l$:

$$Q = \frac{1}{k'^2}\operatorname{sn} x - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x; \qquad l = \frac{(1-k^2)K - (1+k^2)E}{k'^4 K}$$

$$Q = -\operatorname{cn} x - \frac{k'^2 - k^2}{k'^2}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x; \qquad l = \frac{k'^2 K - (k'^2 - k^2)E}{k'^2 K}$$

$$Q = -\operatorname{dn} x - \frac{1+k'^2}{k'^2}\frac{H'_1(x)}{H_1(x)}\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x; \qquad l = \frac{(1+k'^2-k^2)K - (1+k^2)E}{k'^2 K}$$

Die Differentialgleichungen, deren Integrale die soeben angeführten Ausdrücke representiren, sind die folgenden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - [2.3k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2]\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [2.3k^2 \operatorname{cn} x^2 - 1 \qquad ]\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [2\,.\,3 \operatorname{dn} x^2 - 1 - k'^2]\, y = 0,$$

und sie gehören sämmtlich zu der Classe der Lamé'schen Gleichungen.

Man könnte leicht die Anzahl jener Resultate beliebig vermehren, allein es erscheint kaum von Interesse, wenigstens nicht für unseren Zweck, hier weiter vorzugehen. Statt dessen werde ich eine andere Form von $P$ anführen, welche gleichfalls den gestellten Bedingungen genügt, die aber nicht zu den elliptischen Functionsformen gehört. Diese Form ist die folgende:

$$P = e^{\lambda \operatorname{Sin} x}$$

wo $\lambda$ einen constanten Coefficienten bezeichnet. Es findet sich hiermit:

$$Q = e^{\lambda \operatorname{Sin} x}\int [e^{-2\lambda \operatorname{Sin} x} - l]\, dx$$

Dieser Ausdruck muss nun nach den Vielfachen von $x$ entwickelt werden, was leicht mit Hülfe von Cylinderfunctionen geschehen kann. Wir begnügen uns, hier bloss die ersten Glieder hinzusetzen. Es findet sich alsdann:

$$l = 1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1.2}(2\lambda)^2 + \tfrac{3}{8}\tfrac{1}{1.2.3.4}(2\lambda)^4 + \dots$$

$$Q \doteq e^{\lambda \operatorname{Sin} x} \Big\{ \left[ 2\lambda + \tfrac{3}{4} \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2\lambda)^3 + \ldots \right] \operatorname{Cos} x$$

$$- \tfrac{1}{2} \left[ \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{1 \cdot 2} (2\lambda)^2 + \ldots \right] \operatorname{Sin} 2x$$

$$- \ldots \Big\}$$

Endlich findet sich die Differentialgleichung, welcher durch diese Resultate genügt wird, wie folgt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda \operatorname{Sin} x - \lambda^2 \operatorname{Cos} x^2]\, y = 0$$

Die Anwendung der im Vorhergehenden dargestellten Methode werde ich jetzt an einem Beispiele zeigen, was ich mit der Angabe einiger Details hier anführe. Die vorgelegte Differentialgleichung sei:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + a^2 \operatorname{Cos} \lambda v \,.\, y = X_0,$$

wo $a$ und $\lambda$ constante Coefficienten und $X_0$ eine Function der Form:

$$\Psi_0 + \Psi_1 y + \Psi_2 y^2 + \ldots\ldots$$

bezeichnen mögen. Es werde nun ein Integral der vorgelegten Gleichung ohne willkürliche Constanten verlangt, das aber aus lauter rein periodischen Gliedern bestehen soll.

Statt der Veränderlichen $v$ führe ich eine neue $x$ ein, indem ich setze:

$$\lambda v = 2 \frac{\pi}{2K} x$$

und mir vorbehalte, über den Modul $k$, von dem das vollständige Integral $K$ abhängt, noch zu disponiren. Hiernach erhalten wir:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4a^2}{\lambda^2} \left( \frac{\pi}{2K} \right)^2 \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x \,.\, y = \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\pi}{2K} \right)^2 X_0$$

Um diese Gleichung auf eine der im Vorhergehenden betrachteten Formen zu bringen, bedienen wir uns der Entwicklung:

$$\operatorname{Cos} 2 \operatorname{am} x = -A$$
$$+ \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{16q}{k^2(1-q^2)} \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x$$
$$+ \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{32q^2}{k^2(1-q^4)} \operatorname{Cos} 4 \frac{\pi}{2K} x$$
$$+ \ldots.,$$

wo die Constante $A$ von der Ordnung der Grösse $k^2$ ist. Man hat nämlich:

$$A = 1 - \frac{2}{k^2} \frac{K-E}{K}$$

oder

$$A = -\frac{\pi}{2K}\left(\frac{1}{8} k^2 - \frac{3}{64} k^4 + \ldots.\right)$$

Aus der angeführten Entwicklung erhalten wir:

$$\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x = \frac{k^2(1-q^2)}{16q} \operatorname{Cos} 2 \operatorname{am} x$$
$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{2q(1-q^2)}{1-q^4} \operatorname{Cos} 4 \frac{\pi}{2K} x$$
$$- \ldots..$$
$$+ \frac{k^2(1-q^2)}{16q} A$$

Diesen Werth führen wir in die vorgelegte Differentialgleichung ein, und bestimmen dabei den Modul in der Weise, dass der Coefficient von $\operatorname{Cos} 2 \operatorname{am} x$ gleich $k^2$ wird. Wir erhalten somit:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (2k^2 \operatorname{sn} x^2 - k^2)\, y = \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_0$$
$$- \frac{4\alpha^2}{\lambda^2} \frac{k^2(1-q^2)}{16q} A y$$
$$+ \frac{4\alpha^2}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{2q(1-q^2)}{1-q^4} \operatorname{Cos} 4 \frac{\pi}{2K} x \cdot y$$
$$+ \ldots...$$
$$= X,$$

indem wir nämlich der Kürze wegen die Summe der Glieder rechter Hand mit $X$ bezeichnen. Wie man leicht bemerkt, sind die mit $y$ multiplicirten Glieder rechter Hand Grössen dritter Ordnung.

Das Integral dieser Gleichung ist uns aber bekannt; es ist nämlich:

$$y = C_1 \operatorname{dn} x + C_2 \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \left\{ \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} + \frac{E}{K} x \right\}$$

$$- \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \int X \operatorname{dn} x \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} dx + \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \int X \operatorname{dn} x \, dx$$

$$+ \frac{1}{k'^2} \frac{E}{K} \operatorname{dn} x \int dx \int X \operatorname{dn} x \, dx$$

Vermöge der Bedingung, wodurch $k$ bestimmt werden soll, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{k^2(1-q^2)}{16q} \frac{4a^2}{\lambda^2} = k^2,$$

woraus folgt:

$$q^2 + 4 \frac{\lambda^2}{a^2} q - 1 = 0$$

Hieraus ergiebt sich:

$$q = -2 \frac{\lambda^2}{a^2} + \sqrt{4 \frac{\lambda^4}{a^4} + 1}$$

und sieht man sogleich, dass bei jedem Werthe des Verhältnisses $\frac{\lambda}{a}$ die Grösse $q$ kleiner, oder jedenfalls nicht grösser als die Einheit ausfallen muss.

Wenn nun $X_0$ eine bekannte, aus periodischen Gliedern bestehende Function bedeutet, wo das Argument $2 \frac{\pi}{2K} x$ und die Vielfachen desselben nicht vorkommen, so wird man den Werth des Integrales leicht und sicher ermitteln können, sofern die willkürlichen Constanten $C_1$ und $C_2$ gleich Null gesetzt werden dürfen. — Findet sich aber in $X_0$ ein Glied der Form:

$$l \operatorname{Sin} 2 \frac{\pi}{2K} x,$$

sei es direct, oder in Folge der successiven Annäherungen entstanden, so erscheint im Resultate ein Glied der Form

$$l_1\, x \,\mathrm{dn}\, x,$$

was aber unmittelbar weggeschafft werden kann, indem man die Constante $C_2$ aus der Gleichung

$$C_2 - k'^2 l_1 = 0$$

bestimmt.

Endlich betrachten wir den Fall, wo in $X_0$ ein Glied der Form

$$h \,\mathrm{Cos}\, 2\frac{\pi}{2K} x$$

vorkommt. Ein solches Glied kann zwar nicht immer weggeschafft werden, aber doch unter gewissen Bedingungen, die eben dem Probleme der drei Körper eigenthümlich sind. Hierzu gehört nämlich, dass der Coefficient $h$ eine Grösse zweiter Ordnung ist, sowie dass in der Function $\Psi_1$ ein Glied derselben Form vorhanden ist. Nennen wir den Coefficienten dieses Gliedes $p$, so ist die Constante $C_1$ so zu bestimmen, dass der Coefficient von $\mathrm{Cos}\, 2\frac{\pi}{2K} x$ in der Entwicklung von

$$h \,\mathrm{Cos}\, 2\frac{\pi}{2K} x + pC_1 \,\mathrm{Cos}\, 2\frac{\pi}{2K} x \,\mathrm{dn}\, x$$

verschwindet. — Es ist übrigens leicht zu bewirken, dass ein solches Glied in der Function $\Psi_1$ vorkommt; denn wäre es nicht vorhanden, so hätte man nur nöthig, die ursprüngliche Gleichung in der Gestalt

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (\alpha^2 + p)\,\mathrm{Cos}\,\lambda v \,.\, y = X_0 + p \,\mathrm{Cos}\,\lambda v \,.\, y$$

zu schreiben und $\alpha^2 + p$ statt $\alpha^2$ in den nachfolgenden Formeln anzuwenden.

Wir haben jetzt gesehen, wie die im Vorhergehenden entwickelte Methode angewendet wird; in Bezug auf ihr Wesen und ihre Bedeutung für die Lösung des Problems der drei Körper seien mir noch einige Bemerkungen gestattet.

Die Glieder, die wir zu vermeiden beabsichtigten, sind als dadurch entstanden anzusehen, dass eine gewisse Grösse gleich Null geworden ist. Das Glied $x \,\mathrm{Sin}\, x$ entsteht z. B. dadurch, dass die Grösse $\delta$ in dem Ausdrucke

$$\mathrm{Sin}\, x \int \mathrm{Cos}\, \delta x \,.\, dx$$

verschwindet. Diesem entsprechend ist auch das Mittel, solche Glieder zu

vermeiden, hier gefunden worden. Denn die Lamé'schen Gleichungen, von welchen wir vorhin eine in Anwendung brachten, sind specielle Fälle von allgemeineren Gleichungen, welche von Herrn Hermite zuerst integrirt worden sind. Die hier benutzten Gleichungen entstehen aus den allgemeinen dadurch, dass der von Hermite mit $\omega$ bezeichneten Grösse gewisse Specialwerthe zuertheilt werden, nämlich $0, K$ und $K \pm iK'$. Ueberhaupt lassen sich für den hier verfolgten Zweck geeignete Gleichungen finden, indem man die Grösse $c$ in dem Ausdrucke

$$y = z\left(e^{c\int\frac{dx}{z^2}} + e^{-c\int\frac{dx}{z^2}}\right),$$

wo $z$ eine Function von $x$ bedeutet, in Null übergehen lässt. Bekanntlich lassen sich die Integrale vieler Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine solche Form darstellen. Durch die angedeutete Specialisirung geht dieselbe, jedoch nicht immer, in solche über, welche wir im Vorhergehenden betrachtet haben.

Umgekehrt aber könnte man, gerade an diese Bemerkung anknüpfend, vermuthen, dass unser Zweck in mehr directer Weise erreicht werden würde, wenn man die Grösse $c$ nicht gleich Null setzte, sondern derselben einen endlichen, wenn auch kleinen Werth gäbe. Dass dieser Punkt genauer, als bisher geschah, untersucht werden muss, ist sicher; indessen hat es doch den Anschein, als ob die Vortheile mehr auf Seite der soeben vorgetragenen Methode liegen.

Die Herstellung der Form, bei der das Argument ausserhalb der trigonometrischen Functionszeichen nicht heraustritt, ist indessen von durchgreifender Bedeutung für die Lösung des Problems der drei Körper. Glieder, die man, ohne diese Form zu erhalten zu suchen, zusammenschlagen konnte, lassen sich nicht mehr vereinigen. Die Glieder

$$A \operatorname{Cos} x + B \operatorname{Cos}[(1 + \delta_1)x + D_1] + C \operatorname{Cos}[(1 + \delta_2)x + D_2] + \ldots,$$

wo $\delta_1, \delta_2 \ldots$ kleine Grössen erster Ordnung bedeuten, konnte man z. B. in der Weise vereinigen, dass man nach den Potenzen von diesen Grössen entwickelte und bloss die von den ersten Potenzen abhängigen Glieder beibehielt. Die Summe wurde alsdann auf nur zwei Glieder reducirt. Indem aber nun eine derartige Entwicklung vermieden werden soll, verzichtet man selbstverständlich auf die entsprechende Vereinfachung. Die

obigen Glieder lassen sich aber in anderer Weise zusammenziehen, indem man nämlich neue Functionsformen bildet. Wir setzen:

$$\eta \operatorname{Cos} \pi = A + B \operatorname{Cos}(\delta_1 x + D_1) + C \operatorname{Cos}(\delta_2 x + D_2) + \ldots .$$

$$\eta \operatorname{Sin} \pi = - B \operatorname{Sin}(\delta_1 x + D_1) - C \operatorname{Sin}(\delta_2 x + D_2) - \ldots .$$

und erhalten die obige Summe durch den Ausdruck

$$\eta \operatorname{Cos}(x - \pi)$$

representirt.

Die Grössen $\eta$ und $\pi$ sind jetzt Functionen von $x$, die sich sehr langsam ändern, weil die Grössen $\delta_1$, $\delta_2$, .... sehr klein sind. Verschwinden diese Grössen ganz und gar, so gehen jene Functionen in Constanten über, und in der That entsprechen sie Integrationsconstanten, wenn die störende Masse gleich Null wird. Die Integrationsconstanten der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper sind aber nicht Specialwerthe jener Functionen, sondern sind theils in den Coefficienten $A$, $B$, $C$, .... enthalten theils in den Bögen $D_1$, $D_2$, .... Dadurch, dass wir die vollständige Form beibehalten, kommen wir aber in die Lage, den Begriff einer absoluten Bahn bilden zu können, d. h. einer Bahn, deren Elemente absolute Constanten sind. Die Abweichungen der wirklichen Bewegungen von dieser Bahn sind immer kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte.

---

# DAS PROBLEM DER CONFIGURATIONEN

VON

TH. REYE

IN STRASSBURG i/E.

1. Seit einer Reihe von Jahren pflege ich in meinen geometrischen Vorlesungen auf eigenthümliche Gruppen von Punkten, Geraden und Ebenen aufmerksam zu machen, welche durch die Regelmässigkeit ihrer Anordnung sich auszeichnen. Diese Gruppirungen, welche ich »Configurationen» genannt habe,(1) treten bei geometrischen Untersuchungen nicht selten auf. So liegen die 12 Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln zu dreien in 16 Geraden und zu sechsen in 12 Ebenen, und diese 12 Ebenen gehen zu dreien durch die 16 Geraden und zu sechsen durch die 12 Punkte. Die 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen einer Kummer'schen Fläche vierter Ordnung und vierter Classe haben solche gegenseitige Lage, dass durch jeden der 16 Punkte sechs von den 16 Ebenen gehen und auf jeder der letzteren sechs von den 16 Punkten (und zwar auf einem Kegelschnitt) liegen. Wenn zwei Tetraëder einander gegenseitig eingeschrieben sind, so enthält jede ihrer 8 Flächen vier ihrer 8 Eckpunkte und durch jeden der letzteren gehen vier der 8 Flächen. Auch die 15 Potenzebenen, 20 Potenzaxen und 15 Potenzpunkte, welche sechs Kugeln zu zweien, dreien und vieren bestimmen, bilden eine räumliche Configuration,

(1) Zuerst 1876 in meiner »Geometrie der Lage» I, 2 Aufl., S. 4 (vgl. ebenda S. 162 N:o 13), dann in Crelle-Borchardt's Journal 86 S. 209 und in meiner »Synthet. Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme» (1879), S. 54.

und zwar ist jede der 20 Potenzaxen mit 3 Potenzpunkten und 3 Potenzebenen incident, jeder der 15 Potenzpunkte mit 4 Potenzaxen und 6 Potenzebenen, u. s. w.

2. Eine Configuration $n_i$ in der Ebene besteht aus $n$ Punkten und $n$ Geraden in solcher Lage, dass jede der $n$ Geraden $i$ von den $n$ Punkten enthält und durch jeden der $n$ Punkte $i$ von den $n$ Geraden gehen. Durch jede collineare oder reciproke Transformation verwandelt $n_i$ sich wiederum in eine Cf. $n_i$; von letzterer können vier Punkte oder Gerade willkürlich in der Ebene angenommen werden, wenn $n > 3$ ist. Collineare Configurationen sehen wir als nicht wesentlich verschieden an. — Jedes einfache $n$-eck oder $n$-seit bildet eine Cf. $n_2$, ebenso jede Gruppe von ebenen Polygonen, welche zusammen $n$ Eckpunkte haben. Ein sich selbst eingeschriebenes $n$-eck bildet eine Cf. $n_3$, zwei sich wechselseitig eingeschriebene $n$-ecke bilden eine $2n_3$. Reelle Configurationen $8_3$ existiren nicht; dagegen hat Herr S. Kantor(1) drei verschiedenartige Configurationen $9_3$ und zehn verschiedene $10_3$ nachgewiesen. Die bekanntesten derselben sind der ebene Schnitt $10_3$ eines vollständigen räumlichen Fünfecks(2) und die Cf. $9_3$, welcher die Eckpunkte eines zwei Geraden eingeschriebenen Sechsecks und die Schnittpunkte seiner drei Paar Gegenseiten angehören.

3. Eine räumliche Configuration $n_i$ besteht aus $n$ Punkten und $n$ Ebenen in solcher Lage, dass auf jeder der $n$ Ebenen $i$ von den $n$ Punkten enthalten sind und durch jeden der $n$ Punkte $i$ von den $n$ Ebenen gehen; wir bezeichnen diese Cf. genauer mit $(n_i, g_k)$, wenn zu ihr noch $g$ Gerade gehören, die mit je $k$ der $n$ Punkte und je $k$ der $n$ Ebenen incident sind. Die Kummer'sche Cf. (1.) ist demnach mit $16_6$ oder aber mit $(16_6, 120_2)$ zu bezeichnen, die Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln gehören zu einer Cf. $(12_6, 16_3)$ und die Potenzebenen, Potenzpunkte und Potenzaxen von sechs Kugeln bilden eine Cf. $(15_6, 20_3)$. Beliebige $n$ Strahlen einer Regelschaar bestimmen mit $n$ ihrer Leitstrahlen die $n^2$ Punkte und $n^2$ Ebenen einer Cf. $(n^2_{2n-1}, 2n_n)$, z. B. einer $(9_5, 6_3)$, wenn $n = 3$ ist; ebenso bestimmt eine Schläfli'sche Doppelsechs eine sie enthaltende Cf. $(30_9, 12_5)$. Die zwölf Eckpunkte eines regulären Ikosaëders bilden mit den zwölf Diagonalebenen, in welchen je fünf Kanten liegen, eine Cf. $(12_5, 60_2)$; dieselbe

(1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Jahrg. 1881, Nov. und Decbr.

(2) Vgl. darüber meine »Geometrie der Lage« II, 2 Aufl., S. 69.

lässt sich ebenso einfach aus dem regulären Dodekaëder ableiten und wird durch eines der regulären Polyëder von Poinsot dargestellt.

4. Die Configuration $(n_i, g_k)$ verwandelt sich durch jede collineare oder reciproke Transformation wiederum in eine Cf. $(n_i, g_k)$; von letzterer können, wenn $n > 4$ ist, fünf Punkte oder fünf Ebenen beliebig angenommen werden. Sind zwei reciproke Configurationen $(n_i, g_k)$ in einem Nullsysteme einander zugeordnet, so bilden sie zusammen eine Cf. $(2n_{i+1}, 2g_k)$, indem jede Ebene derselben auch durch ihren Nullpunkt geht und jeder ihrer Punkte in seiner Nullebene liegt. Auf diese Art erhält man aus dem Tetraëder eine Cf. $8_4$, aus dieser wiederum eine $16_5$, u. s. w. Aus gewissen räumlichen Configurationen kann man durch die Methode des Projicirens und Schneidens complicirtere ebene Cff. ableiten. Projicirt man z. B. die Punkte und Geraden einer Cf. $(12_6, 16_3)$ aus einem beliebigen Punkte auf eine Ebene $\varepsilon$, mit welcher man zugleich die Geraden und Ebenen der Cf. zum Durchschnitt bringt, so erhält man in $\varepsilon$ eine ebene Cf. $28_4$; ebenso ergiebt sich aus der Potenz-Cf. $(15_6, 20_3)$ von sechs Kugeln eine ebene Cf. $35_4$, und aus dem Tetraëder die oben (3.) erwähnte Cf. $10_3$.

5. Das Problem der Configurationen nun verlangt, dass alle verschiedenartigen, zu den Zahlen $n$ und $i$ gehörigen Configurationen $n_i$ ermittelt und dass ihre wichtigsten Eigenschaften aufgesucht werden. Der erste Theil dieser Aufgabe ist bislang nur für die ebenen Configurationen $9_3$ und $10_3$, und zwar von Herrn S. Kantor a. a. O. gelöst worden. Von der Kummer'schen Cf. $16_6$ hat Herr F. Klein eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften aufgedeckt;(1) ihre Beziehungen zu Thetafunctionen mit zwei Variabeln sind durch die Herren Cayley, Borchardt und H. Weber bekannt.(2) Von der Cf. $(12_6, 16_3)$, deren Untersuchung von den Herren Giuseppe Veronese und Cyparissos Stephanos nach verschiedenen Richtungen erfolgreich begonnen wurde,(3) enthält der folgende Aufsatz wesentliche Eigenschaften. Offenbar aber bleibt auf diesem Gebiete noch

(1) F. Klein in den Mathem. Annalen II, S. 199—226.

(2) Cayley in Crelle-Borchardt's Journal 83 S. 210 und 84 S. 238; Borchardt ebenda 83 S. 234; H. Weber ebenda 84 S. 332. — Vgl. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen, Lpz. 1882.

(3) Stephanos im Bulletin des sciences math. et astron., 2e série T. III, 1879; Veronese in den Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1880—81.

viel zu thun übrig. So ist die Frage nach den algebraischen Gleichungen, mit welchen die Configurationen zusammenhängen, unseres Wissens noch von Niemand in Angriff genommen worden. Hervorzuheben ist auch die Frage, durch wie viele ihrer Elemente (Punkte, Gerade und Ebenen) eine beliebige Configuration bestimmt ist und wie sie sich bewegt, wenn eines der sie bestimmenden Elemente seine Lage stetig ändert. Dass die Kummer'sche Cf. $16_6$ durch sechs ihrer Punkte bestimmt ist und ihre Theorie mit derjenigen des räumlichen Sechsecks sehr innig zusammenhängt, ist bekannt.([1])

Strassburg [i]/E den 16 Sept. 1882.

([1]) Vgl. meine »Geometrie der Lage» II, 2 Aufl. S. 250—259 und Crelle-Borchardt's Journal 86 S. 84 und 209.

# DIE HEXAËDER- UND DIE OCTAËDER-CONFIGURATIONEN $(12_6, 16_3)$

VON

TH. REYE

IN STRASSBURG i/E.

1. Die Configuration $(12_6, 16_3)$, welche zuerst bei den Aehnlichkeitspunkten von vier Kugeln bemerkt wurde,(¹) steht in engen Beziehungen zum Fünfflach und zum räumlichen Fünfeck. Einerseits nämlich bilden die sechs Punkte, in welchen die Kanten eines Tetraëders $\varDelta$ von einer Ebene $\varepsilon$ geschnitten werden, mit denjenigen sechs Punkten, welche von ihnen durch je zwei Eckpunkte harmonisch getrennt sind, die 12 Punkte einer Cf. $(12_6, 16_3)$; die 12 Ebenen derselben bestehen aus den vier Tetraëderflächen, der Ebene $\varepsilon$ und den sieben Ebenen $\varepsilon'$, welche von $\varepsilon$ durch je zwei Gegenelemente des Tetraëders harmonisch getrennt sind. Anderseits bilden die sechs Ebenen, durch welche die Kanten eines Tetraëders $\varDelta_1$ aus einem Punkte $P$ projicirt werden, mit denjenigen sechs Ebenen, welche von ihnen durch je zwei Tetraëderflächen harmonisch getrennt sind, die 12 Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$, und zwar bestehen deren 12 Punkte aus den vier Eckpunkten von $\varDelta_1$, dem Punkte $P$ und den sieben Punkten $P'$, welche von $P$ durch je zwei Gegenelemente des Tetraëders harmonisch getrennt sind. Wenn $P$ sich bewegt, so beschreiben die acht Punkte $P'$ und $P$ acht collineare, involutorisch liegende Räume. Zwei so construirte Configurationen $(12_6, 16_3)$ können collinear oder reciprok auf einander bezogen werden, indem man die sie bestimmenden

(¹) Vgl. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 1822, p. 409.

Tetraëder und Punkte oder Ebenen als homologe Elemente einander zuweist; denn harmonische Gebilde gehen durch collineare oder reciproke Transformationen allemal wieder in harmonische Gebilde über. Wir wollen zunächst zeigen, dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ auf beide Arten construirt werden kann und dass folglich aus einer solchen Cf. alle übrigen durch collineare sowohl als auch durch reciproke Transformationen ableitbar sind.

2. Die drei Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$, welche durch eine ihrer 16 Geraden $g$ gehen, enthalten zusammen alle 12 Cf.-Punkte, nämlich ausser den drei auf $g$ liegenden noch je drei ausserhalb $g$ befindliche. Zu der Cf. gehört folglich jede Ebene, welche eine Gerade und einen Punkt oder auch zwei Gerade der Cf. verbindet, ebenso aber jeder Punkt, in welchem eine Gerade und eine Ebene oder zwei Gerade der Cf. sich schneiden. Eine Ebene enthält deshalb höchstens vier Cf.-Gerade; dieselben müssen sich in ihren 6 Cf.-Punkten schneiden, und keine drei von ihnen gehen durch einen Punkt, weil sonst die Ebene mehr als sechs Cf.-Punkte enthalten würde. Jede Cf.-Ebene wird von mindestens zwölf Cf.-Geraden geschnitten, und zwar in jedem ihrer sechs Punkte von höchstens zwei, weil sonst durch den Punkt mehr als sechs Cf.-Ebenen gehen würden. Also liegen ausserhalb jeder Cf.-Ebene genau zwölf Cf.-Gerade und in ihr vier Gerade und sechs Punkte der Cf.; letztere bilden zusammen ein vollständiges Vierseit, in dessen Eckpunkten die Ebene von je zwei der übrigen 12 Geraden geschnitten wird. Ebenso gehen durch jeden Punkt der Cf. vier Gerade und sechs Ebenen derselben, und zwar bilden dieselben ein vollständiges Vierkant, dessen Ebenen je zwei der übrigen 12 Cf.-Geraden projiciren.

3. Zwei beliebige Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$ schneiden sich entweder in einer Cf.-Geraden oder in einer »Diagonale« der Cf., welche zwei und nur zwei Punkte derselben verbindet; denn jede Cf.-Gerade der einen Ebene hat mit der andern einen Cf.-Punkt gemein (2.). Jede Cf.-Ebene schneidet folglich acht der 11 übrigen paarweise in ihren vier Cf.-Geraden und die drei letzten Cf.-Ebenen in den drei Diagonalen ihres Cf.-Vierseits; sie bildet mit diesen letzteren drei Cf.-Ebenen ein Tetraëder $\Delta$, dessen Kanten aus sechs Diagonalen der Cf. bestehen. Da die drei Diagonalen eines Vierseits sich gegenseitig harmonisch theilen, so sind die 12 Punkte der Cf. paarweise harmonisch getrennt durch die Eckpunkte des Tetraëders $\Delta$; sie können folglich auf die oben (1.) zuerst angegebene Art construirt

werden mittelst des Tetraëders $\Delta$ und irgend einer der übrigen acht Cf.-Ebenen $\varepsilon$. Die 12 Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$ bilden drei verschiedene Tetraëder $\Delta$, deren 18 Kanten durch je zwei der 12 Cf.-Punkte harmonisch getheilt werden. Jede Fläche eines beliebigen dieser Tetraëder schneidet die Flächen und Kanten der beiden anderen paarweise in vier Geraden und sechs Punkten der Cf., und jede Kante desselben schneidet zwei paar Gegenkanten der andern in zwei Cf.-Punkten. Die drei Tetraëder $\Delta$ bilden demnach ein »desmisches System«,(1) und je zwei von ihnen liegen auf vierfache Art perspectiv bezüglich der vier Ebenen des dritten. Durch die 16 Cf.-Geraden geht ein Büschel von Flächen vierter Ordnung, welche die 12 Cf.-Punkte zu Doppelpunkten haben; drei dieser Flächen zerfallen in die Ebenen der drei Tetraëder $\Delta$.

4. Auf analoge Weise bilden die 12 Punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ drei Tetraëder $\Delta_1$, durch deren Flächen die Ebenen der Cf. paarweise harmonisch getrennt sind. Aus jedem derselben und einem der übrigen acht Cf.-Punkte $P$ kann die Cf. auf die zweite der angegebenen Arten (1.) construirt werden; jedes dieser drei $\Delta_1$ ist folglich Poltetraëder von doppelt unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche den beiden andern umschrieben werden können. Aus jedem Eckpunkte eines beliebigen dieser drei $\Delta_1$ werden die Eckpunkte und Kanten der beiden übrigen paarweise durch vier Gerade und sechs Ebenen der Cf. projicirt; je zwei der drei Tetraëder $\Delta_1$ liegen demnach perspectiv bezüglich der Eckpunkte des dritten. Die drei $\Delta_1$ haben wie die drei $\Delta$ die 18 Diagonalen der Cf. zu Kanten und bilden gleichfalls ein desmisches System; jedes $\Delta_1$ hat mit jedem $\Delta$ zwei Gegenkanten gemein. Die 24 Eckpunkte, 24 Ebenen und 18 Kanten der sechs Tetraëder $\Delta$ und $\Delta_1$ bilden die von Herrn Vietor(2) untersuchte »harmonische« Cf. $(24_9, 18_4)$, deren 18 Geraden mit je vier harmonischen Punkten und je vier harmonischen Ebenen derselben incident sind.

5. Als Repräsentant der Configurationen $(12_6, 16_3)$ kann die Würfelconfiguration betrachtet werden, welche ausser den 8 Eckpunkten, 12

(1) Nach der Ausdrucksweise des Herrn Cyparissos Stephanos im Bulletin des sciences math. et astr., 2e série t. III, 1879. Veronese (Sopra alcune notevoli configurazioni ... in den Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1880—81) nennt sie »tetraedri fasciali«.

(2) Vietor in den Berichten über d. Verhdlgn. d. naturf. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. VIII. 2, 1882.

Kanten und 6 Flächen eines Würfels noch dessen Mittelpunkt $M$, die durch $M$ gehenden 4 Diagonalen und 6 Diagonalebenen und die drei unendlich fernen Kantenpunkte enthält (Fig. 1). Die drei Tetraëder $\Delta$ dieser Cf. werden gebildet von je zwei parallelen Flächen und den beiden zu ihnen normalen Diagonalebenen des Würfels. Die drei unendlich fernen Kantenpunkte bilden mit $M$ das eine der drei Tetraëder $\Delta_1$; die beiden anderen werden von je vier Eckpunkten gebildet, die auf den quadratischen Würfelflächen einander gegenüber liegen, und ihre Kanten sind die 12 Diagonalen dieser 6 Quadrate (Fig. 2). — Die Configurationen $(12_6, 16_3)$ werden auch repräsentirt durch diejenige des regulären Octaëders, welche aus dessen 8 Flächen, 12 Kanten und 6 Eckpunkten, den 3 Diagonalebenen, der unendlich fernen Ebene und den unendlich fernen 6 Punkten und 4 Geraden der Kanten und Flächen besteht (Fig. 3). Wir bezeichnen die $(12_6, 16_3)$ als Hexaëder- oder Octaëder-Configurationen, weil sie sowohl collinear als auch reciprok in diejenigen des Würfels und des regulären Octaëders transformirt werden können (1.).

6. Die 12 Flächen der drei Tetraëder $\Delta_1$ einer Würfelconfiguration gehören zu der Cf. $(12_6, 16_3)$ eines regulären Octaëders, welches die Mittelpunkte der sechs Würfelflächen zu Eckpunkten hat (Fig. 2); sie bilden die drei mit jenen $\Delta_1$ identischen Tetraëder $\Delta$ dieser Octaëderconfiguration, aus welcher ganz ebenso wieder die Würfelconfiguration abgeleitet werden kann. Ueberhaupt gehört zu jeder Cf. $(12_6, 16_3)$ eine andere ihr dreifach um- und eingeschriebene, so dass die Tetraëder $\Delta$ oder $\Delta_1$ der ersteren mit den Tetraëdern $\Delta_1$ resp. $\Delta$ der letzteren identisch sind, also durch jeden Punkt der einen drei Ebenen der andern Cf. gehen und in jeder Ebene der einen drei Punkte der andern liegen. Die 24 Punkte und 24 Ebenen von zwei so zusammengehörigen Configurationen bilden mit ihren 18 Diagonalen, d. h. mit den 18 Kanten ihrer Tetraëder $\Delta$ und $\Delta_1$ wiederum die harmonische Configuration $(24_9, 18_4)$. Letztere sowie jede der beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ ist sich selbst zugeordnet in den 24 centrisch-involutorischen Systemen, welche je einen Eckpunkt der Tetraëder $\Delta$ und $\Delta_1$ zum Involutionscentrum und die gegenüberliegende Ebene zur Involutionsebene haben.

7. Um zwei Configurationen $(12_6, 16_3)$ reciprok auf einander zu beziehen, kann man fünf Punkten $P$ der einen, von welchen die vier ersten eines ihrer Tetraëder $\Delta_1$ bilden, beziehungsweise fünf Ebenen $\varepsilon$ der

andern, von welchen die vier ersten ein Tetraëder $\Delta$ derselben bilden, als entsprechende zuweisen (1.). Da nun die letztere Cf. drei Tetraëder $\Delta$ enthält und jedes derselben durch 24 Permutationen seiner 4 Ebenen $\varepsilon$ darstellbar ist, ausserdem aber die fünfte Ebene $\varepsilon$ der Cf. acht verschiedene Lagen annehmen kann, so ergiebt sich: Zwei beliebige Configurationen $(12_6, 16_3)$ können auf $3.24.8 = 576$ verschiedene Arten reciprok und ebenso oft collinear auf einander bezogen werden.[1] — Eine Cf. $(12_6, 16_3)$ ist in zwölf verschiedenen Nullsystemen sich selbst zugeordnet; man erhält zwei derselben, wenn man irgend zwei sich schneidenden Cf.-Geraden diejenigen beiden zu ihnen windschiefen zuordnet, deren Schnittpunkt in der Ebene der ersteren liegt. Um diese 12 Nullsysteme übersichtlich darstellen zu können, bezeichnen wir die Punkte und Ebenen der Cf. auf folgende Art.

8. Sei *iklm* irgend eine Permutation von 1 2 3 4. Wir bezeichnen dann die Punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ durch die zwölf Ziffernpaare *ik*, und von ihren Ebenen vier durch die Ziffern $i = 1, 2, 3, 4$, die übrigen acht durch die Ternen *ikl* oder deren cyclische Permutationen, und zwar so, dass die drei Tetraëder $\Delta_1$ von den Punktenquadrupeln:

12 21 34 43, 13 24 31 42 und 14 23 32 41

gebildet werden, die drei Tetraëder $\Delta$ aber von den Ebenenquadrupeln:

1 2 3 4, 234 143 124 132 und 432 134 142 123.

Die Punkte *ik*, *il*, *im* liegen in einer Cf.-Geraden (vgl. Fig. 1 und 2); ebenso die Punkte *ik*, *li*, *mi*. Die sechs Punkte:

*ik*, *il*, *im*, *ki*, *li*, *mi* liegen in der Ebene *i*, und

*ik*, *il*, *im*, *lm*, *mk*, *kl* liegen in der Ebene $klm = lmk = mkl$;

die sechs Ebenen *i*, *ikl*, *ikm*, *k*, *klm*, *kml* gehen demnach durch den Punkt *ik*. Von den 18 Diagonalen $\overline{ik\ ki}$ und $\overline{ik\ lm}$ der Cf. schneiden sich $\overline{ik\ ki}$, $\overline{kl\ lk}$ und $\overline{li\ il}$ in einem Eckpunkte der drei Tetraëder $\Delta$, ebenso $\overline{ik\ lm}$, $\overline{kl\ im}$ und $\overline{li\ km}$; der letztere Eckpunkt liegt der Ebene *lki* und der erstere der Ebene *m* gegenüber, beide sind in Fig. 3 ebenso bezeichnet wie diese ihre Gegenebenen. Die Schemata:

---

(1) Dieser und der folgende Satz wurden bereits von Herrn Vietor, welchem ich sie vor $1^1/_2$ Jahren mittheilte, a. a. O. veröffentlicht.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ki* | *kl* | *km* | und | *ki* | *kl* | *km* |
| *lk* | *li* | *lm* | | *lk* | *il* | *ml* |
| *mk* | *ml* | *mi* | | *mk* | *lm* | *im* |

repräsentiren die 9 Cf.-Punkte, welche ausserhalb der Geraden $\overline{ik\ il\ im}$ resp. $\overline{ik\ li\ mi}$ liegen, zugleich aber durch ihre 3 Zeilen und 3 Spalten diejenigen sechs Cf.-Geraden, welche diese resp. Geraden nicht schneiden. Die 9 Punkte, 6 Geraden und 9 Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$, welche mit einer beliebigen Cf.-Geraden nicht incident sind, liegen hiernach in einer Fläche zweiten Grades und bilden eine Cf. $(9_5, 6_3)$.

9. Die zwölf Nullsysteme $A_i$, $B_i$, $C_i$, in welchen die Configuration $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist, lassen sich nun durch folgende Tabelle darstellen:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 234 | 143 | 124 | 132 | 432 | 134 | 142 | 123 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12 | 21 | 34 | 43 | 13 | 24 | 31 | 42 | 14 | 23 | 32 | 41 |
| $A_2$ | 21 | 12 | 43 | 34 | 42 | 31 | 24 | 13 | 32 | 41 | 14 | 23 |
| $A_3$ | 12 | 21 | 43 | 34 | 14 | 23 | 41 | 32 | 13 | 24 | 42 | 31 |
| $A_4$ | 21 | 12 | 34 | 43 | 23 | 14 | 32 | 41 | 24 | 13 | 31 | 42 |
| $B_1$ | 13 | 24 | 31 | 42 | 14 | 23 | 32 | 41 | 12 | 21 | 34 | 43 |
| $B_2$ | 31 | 42 | 13 | 24 | 23 | 14 | 41 | 32 | 43 | 34 | 21 | 12 |
| $B_3$ | 13 | 42 | 31 | 24 | 12 | 43 | 34 | 21 | 14 | 41 | 32 | 23 |
| $B_4$ | 31 | 24 | 13 | 42 | 34 | 21 | 12 | 43 | 32 | 23 | 14 | 41 |
| $C_1$ | 14 | 23 | 32 | 41 | 12 | 21 | 34 | 43 | 13 | 24 | 31 | 42 |
| $C_2$ | 41 | 32 | 23 | 14 | 34 | 43 | 12 | 21 | 24 | 13 | 42 | 31 |
| $C_3$ | 14 | 32 | 23 | 41 | 13 | 31 | 24 | 42 | 12 | 34 | 21 | 43 |
| $C_4$ | 41 | 23 | 32 | 14 | 42 | 24 | 31 | 13 | 43 | 21 | 34 | 12 |

Aus derselben ist ersichtlich, dass z. B. in dem Nullsysteme $C_3$ den Ebenen 1, 2, 3, 4, 234, . . . . . , 123 die resp. in ihnen liegenden Punkte 14, 32, 23, 41, 13, . . . . . , 43 zugeordnet sind, und folglich den vier Geraden 21 24 23, 12 31 41, 34 42 14, 43 13 32 die resp. Geraden 34 31 32, 43 24 14, 21 13 41, 12 42 23, während die übrigen acht

Cf.-Geraden in $C_3$ sich selbst zugeordnet sind. In jedem der zwölf Nullsysteme sind acht Cf.-Gerade sich selbst und die übrigen acht paarweise einander zugeordnet. Die beiden Nullsysteme eines jeden der sechs Paare:

$$A_1A_2, \quad B_1B_2, \quad C_1C_2, \quad A_3A_4, \quad B_3B_4, \quad C_3C_4$$

stehen zu einander in solcher Wechselbeziehung, dass die acht Cf.-Geraden, welche in einem von ihnen paarweise einander zugeordnet sind, acht sich selbst zugeordnete »Leitstrahlen» des andern bilden (vgl. 13.).

10. Die vier Nullsysteme $A_i$ sind paarweise involutorisch und bestimmen zu zweien sechs geschaart-involutorische Systeme $A_iA_k$ und zu dreien vier räumliche Polarsysteme $A_kA_lA_m$,[1] in welchen die Cf. ($12_6$,$16_3$) sich selbst zugeordnet ist. Nämlich die Nullpunkte oder Pole einer beliebigen Ebene und die Nullebenen eines jeden Punktes bezüglich der Systeme $A_i$, $A_k$ oder $A_k$, $A_l$, $A_m$ sind einander zugeordnet in dem involutorischen Systeme $A_iA_k$ resp. conjugirt in dem Polarsysteme $A_kA_lA_m$. Das involutorische System $A_2A_3$ z. B. enthält die Punktenpaare 12 21. 42 14. 31 23. 24 41. 13 32 und seine Involutionsaxen gehen durch 34 und 43; das Polarsystem $A_2A_3A_4$ hat die beiden Poltetraëder 14 23 42 31 und 41 32 24 13 und seine Ordnungsfläche enthält die Schaar gemeinschaftlicher Leitstrahlen der Nullsysteme $A_2$, $A_3$, $A_4$ und die drei paar Involutionsaxen von $A_3A_4$, $A_4A_2$ und $A_2A_3$, insbesondere auch die Leitstrahlen $\overline{12\ 21}$ und $\overline{34\ 43}$; durch letztere und durch die Involutionsaxen von $A_2A_3$ geht auch die Ordnungsfläche des Polarsystems $A_1A_2A_3$, von welchem 14 32 42 13 und 41 23 24 31 zwei Poltetraëder sind. Die involutorischen Systeme $\overline{A_iA_k}$ und $\overline{A_lA_m}$ bestimmen zusammen das System $A_1A_2A_3A_4$, von welchem $\overline{12\ 21}$ und $\overline{34\ 43}$ die Involutionsaxen und 13 31, 14 41, 23 32, 24 42 vier Punktenpaare sind, und ebenso bestimmen von den drei Systemen $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ (resp. $A_3A_4$, $B_3B_4$, $C_3C_4$) je zwei das dritte; nämlich je zwei Punkte, welche in zwei dieser Systeme einem beliebigen Punkte zugeordnet sind, sind in dem dritten Systeme einander zugeordnet. Durch die letzteren beiden Gruppen von je drei Systemen werden die Punkte der Cf. ($12_6$, $16_3$) zu vieren so gruppirt:

12 21 34 43, 13 42 31 24, 14 32 41 23;

---

[1] Vgl. F. Klein, Math. Annalen II S. 199—226 und meine »Geometrie der Lage» II, 2 Aufl., S. 256.

diese drei Quadrupel $\Delta_1$ sowie die 3 Tetraëder $\Delta$ sind Poltetraëder eines räumlichen Polarsystems, in welchem die Cf. $(12_6, 16_3)$ der zu ihr gehörigen Cf. $(12_6, 16_3)$ zugeordnet ist, und dessen imaginäre Ordnungsfläche die Involutionsaxen der zweimal drei Systeme und die gemeinschaftlichen Leitstrahlen der einen und der anderen Gruppe enthält (vgl. 16.).

11. Die zwölf Nullsysteme $A_i$, $B_i$, $C_i$ bilden die folgenden neun Gruppen von je vier involutorischen Nullsystemen:

$$A_1A_2A_3A_4,\quad A_1A_2B_3B_4,\quad A_1A_2C_3C_4,\quad B_1B_2A_3A_4,\quad B_1B_2B_3B_4,$$
$$B_1B_2C_3C_4,\quad C_1C_2A_3A_4,\quad C_1C_2B_3B_4,\quad C_1C_2C_3C_4.$$

Von jeder dieser Gruppen gilt dasselbe, was soeben von $A_1A_2A_3A_4$ bemerkt wurde; ein beliebiges der zwölf Nullsysteme liegt also mit sieben anderen involutorisch. Die 12 Nullsysteme bestimmen demnach zu zweien $\frac{12.7}{2} = 42$ und zu vieren 9, im Ganzen also 51 geschaart-involutorische Systeme, zu dreien aber $9.4 = 36$ Polarsysteme, in denen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist. Neun der 51 involutorischen Systeme haben je zwei Gegenkanten der Tetraëder $\Delta_1$ zu Involutionsaxen, sechs andere mit imaginären Axen werden durch das Schema der Punktenpaare:

*ik ki. lm ml. il mk. li km. im lk. mi kl*

dargestellt und die übrigen 36 durch das Schema:

*ik ik. ki ki. lm ml. mk kl. lk km. mi il. li im.*

Die Ordnungsflächen der 36 Polarsysteme sind alle reell und geradlinig; durch je zwei Gegenkanten der 3 Tetraëder $\Delta_1$ gehen vier von ihnen (10.). Wählt man von zwei dieser Tetraëder je zwei Eckpunkte, wie 12 21 und 13 24, deren Verbindungslinien sich nicht schneiden, so bilden diese und die übrigen vier Eckpunkte zwei Poltetraëder 12 21 13 24 und 34 43 31 42 von einem der 36 Polarsysteme (vgl. 10.). Andere Polarsysteme, in welchen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet wäre, existiren nicht.

12. Die gemeinschaftlichen Leitstrahlen der drei Nullsysteme $A_1$, $B_1$, $C_1$ bilden keine Regelschaar, sondern eine lineare Congruenz $A_1B_1C_1$, welche die vier windschiefen Cf.-Geraden

12 13 14, 21 24 23, 34 31 32, 43 42 41

enthält und durch dieselben bestimmt ist. Die drei Nullsysteme liegen folglich in einem Büschel, d. h. die drei Nullpunkte einer beliebigen Ebene liegen in einer Geraden und die drei Nullebenen eines jeden Punktes

gehen durch eine Gerade der Congruenz. Uebrigens sind durch diese 3 Nullsysteme die Punkte und Ebenen des Raumes in Tripeln einander zugeordnet, wie 12, 13, 14 und 1, 234, 432 oder 21, 24, 23 und 2, 143, 134, sodass die Nullpunkte der drei Ebenen eines Tripels in drei cyclischen Permutationen das zugeordnete Punktentripel bilden. Ganz das Gleiche gilt von den Nullsystemen der acht Tripel:

$A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$; $A_3B_3C_3$, $A_3B_4C_4$, $A_4B_3C_4$, $A_4B_4C_3$,

wie aus der obigen Tabelle ersichtlich ist. Die Nullpunkte einer Ebene in den drei paar Nullsystemen $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$ bilden folglich die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten den vier Congruenzen $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ angehören; ebenso bilden ihre Nullpunkte bezüglich der übrigen sechs Nullsysteme ein vollständiges Vierseit und die Nullebenen eines beliebigen Punktes ein vollständiges Vierkant. Durch die sechs Nullsysteme $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ werden die Punkte und Ebenen des Raumes zu Hexaëder-Configurationen $(12_6, 16_3)$ gruppirt, deren 16 Geraden zu vieren den erwähnten vier Congruenzen angehören. Jeder Ebene einer solchen Cf. sind in den 6 Nullsystemen die 6 in ihr liegenden Cf.-Punkte zugeordnet, ferner in den 4 Tripeln $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ die vier paar anderen durch ihre Cf.-Geraden gehenden Cf.-Ebenen, und in den 3 involutorischen Systemen $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ die noch übrigen drei Cf.-Ebenen. Analoges gilt von jedem Punkte einer solchen Cf. Durch die sechs Nullsysteme $A_3B_3C_3A_4B_4C_4$ werden die Punkte und Ebenen des Raumes ebenfalls zu Hexaëder-Configurationen gruppirt, die aber von den vorigen verschieden sind.

13. Die acht linearen Congruenzen der eben besprochenen Tripel werden durch folgende Tabelle übersichtlich dargestellt:

| | $A_3\ B_3\ C_3$ | $A_3\ B_4\ C_4$ | $A_4\ B_3\ C_4$ | $A_4\ B_4\ C_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1B_1C_1$ | 12 13 14 | 21 24 23 | 34 31 32 | 43 42 41 |
| $A_1B_2C_2$ | 21 42 32 | 12 31 41 | 43 24 14 | 34 13 23 |
| $A_2B_1C_2$ | 43 31 23 | 34 42 14 | 21 13 41 | 12 24 32 |
| $A_2B_2C_1$ | 34 24 41 | 43 13 32 | 12 42 23 | 21 31 14 |

Die vier Geraden, welche mit einem der Tripel $ABC$ in derselben Zeile oder Spalte verzeichnet sind, bestimmen die zugehörige lineare Congruenz. Zugleich ist aus der Tabelle ersichtlich, welche acht Cf.-Geraden in jedem

der zwölf Nullsysteme sich selbst und welche acht paarweise einander zugeordnet sind (9.); z. B. in $C_1$ sind die Geraden der ersten und der vierten Reihe ($A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_1$) sich selbst und die übereinander stehenden der zweiten und dritten Reihe einander zugeordnet, in $A_4$ dagegen sind die Geraden der dritten und vierten Spalte ($A_4 B_3 C_4$ und $A_4 B_4 C_3$) sich selbst und die nebeneinander stehenden der ersten und zweiten Spalte einander zugeordnet. Jede der 16 Cf.-Geraden schneidet nur diejenigen sechs anderen nicht, welche mit ihr in derselben Zeile oder Spalte der Tabelle verzeichnet sind. Welche Ebene einem beliebigen Cf.-Punkte in jedem der 12 Nullsysteme zugeordnet ist, lehrt auch diese Tabelle; z. B. dem Punkte 12 ist in $B_4$ und zugleich in $C_2$ die Ebene 124 der Geraden 12 31 41 und 12 24 32 zugeordnet, weil letztere von $B_4$ und $C_2$ zwei Leitstrahlen sind.

14. Welche von den 18 Kanten der Tetraëder $\Delta$ und $\Delta_1$ in jedem der 12 Nullsysteme sich selbst, und welche einander zugeordnet sind, ersieht man aus folgender Tabelle:

| | $A_3$ | $B_3$ | $C_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12 21, 34 43 | 14 32, 41 23 | 13 42, 31 24 | $A_2$ |
| $B_1$ | 14 23, 41 32 | 13 31, 24 42 | 12 43, 21 34 | $B_2$ |
| $C_1$ | 13 24, 31 42 | 12 34, 21 43 | 14 41, 23 32 | $C_2$ |
| | $A_4$ | $B_4$ | $C_4$ | |

Jedes der Nullsysteme $A_i$, $B_i$, $C_i$ hat diejenigen drei paar Tetraëderkanten zu Leitstrahlen, welche mit ihm in derselben Zeile oder Spalte verzeichnet sind; die übrigen 12 Kanten sind paarweise einander zugeordnet, und zwar in $A_1$, $B_1$ oder $C_1$ die übereinander, in $A_2$, $B_2$ oder $C_2$ die überkreuz stehenden, z. B. in $C_1$ die Kanten 12 21 und 14 23, 34 43 und 41 32, cet. und in $C_2$ die Kanten 12 21 und 41 32, 34 43 und 14 23, 14 32 und 24 42, cet. Ebenso sind in $A_3$ die Kanten 14 32 und 13 42, 41 23 und 31 24, 13 31 und 12 43 cet. einander zugeordnet, in $A_4$ dagegen 14 32 und 31 24, 41 23 und 13 42 u. s. w. — Von den neun Paaren Gegenkanten der Tetraëder $\Delta_1$ schneidet ein jedes nur diejenigen vier Kantenpaare nicht, welche mit ihm in einer Reihe oder Spalte der Tabelle verzeichnet sind; diese vier paar Gegenkanten aber liegen allemal auf einer Fläche zweiter Ordnung, weil vier der 8 Kanten die übrigen

vier schneiden. Bezüglich der neun Flächen zweiter Ordnung, welche hiernach durch je acht der 18 Tetraëderkanten gehen, ist die Cf. ($12_6$, $16_3$) der zu ihr gehörigen Cf. ($12_6$, $16_3$) und die aus beiden gebildete harmonische Cf. ($24_9$, $18_4$) sich selbst zugeordnet.

15. Es giebt sechs und nur sechs Nullsysteme, in welchen eine Cf. ($12_6$, $16_3$) der zu ihr gehörigen Cf. und folglich jedes ihrer Tetraëder $\Delta_1$ und $\Delta$ sich selbst zugeordnet ist; man erhält eines derselben, wenn man zwei windschiefen Tetraëderkanten ihre Gegenkanten zuordnet. Die letzte Tabelle (14.) repräsentirt auch diese sechs Nullsysteme, indem jede ihrer 3 Zeilen und 3 Spalten von einem der Nullsysteme drei Paare einander zugeordneter Geraden aufweist; die übrigen 12 Kanten sind Leitstrahlen desselben. — Wir wollen mit (*ik*) die Ebene bezeichnen, welche in einem der Tetraëder $\Delta_1$ dem Eckpunkte *ik* gegenüberliegt, sodass also (*ik*) die drei Punkte *ki*, *lm* und *ml* verbindet und in *ik* die drei Ebenen (*ki*), (*lm*) und (*ml*) sich schneiden. Die sechs neuen Nullsysteme können dann auch folgendermassen übersichtlich dargestellt werden:

| | (12) | (21) | (34) | (43) | (13) | (24) | (31) | (42) | (14) | (23) | (32) | (41) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1A_2$ | 21 | 12 | 43 | 34 | 42 | 31 | 24 | 13 | 32 | 41 | 14 | 23 |
| $B_1B_2$ | 43 | 34 | 21 | 12 | 31 | 42 | 13 | 24 | 23 | 14 | 41 | 32 |
| $C_1C_2$ | 34 | 43 | 12 | 21 | 24 | 13 | 42 | 31 | 41 | 32 | 23 | 14 |
| $A_3A_4$ | 21 | 12 | 43 | 34 | 24 | 13 | 42 | 31 | 23 | 14 | 41 | 32 |
| $B_3B_4$ | 34 | 43 | 12 | 21 | 31 | 42 | 13 | 24 | 32 | 41 | 14 | 23 |
| $C_3C_4$ | 43 | 34 | 21 | 12 | 42 | 31 | 24 | 13 | 41 | 32 | 23 | 14 |

Denn z. B. in dem Nullsysteme $C_1C_2$ sind den Ebenen (12), (21), (34), (43), (13), . . . . . , (41) die resp. in ihnen liegenden Punkte 34, 43, 12, 21, 24, . . . . . , 14 zugeordnet. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass die sechs Nullsysteme involutorisch sind; sie bestimmen zu zweien fünfzehn geschaart-involutorische Systeme und zu dreien zehn Polarsysteme, und zwar ganz dieselben, wie die in gleicher Weise bezeichneten involutorischen Systeme (10.). Beispielsweise bestimmen $A_1A_2$ und $B_3B_4$ das involutorische System $A_1A_2B_3B_4$, dagegen $A_1A_2$ und $B_1B_2$ das System $C_1C_2$. Neun von den 15 involutorischen Systemen haben je zwei Gegenkanten der Tetraëder $\Delta_1$ zu Involutionsaxen (10., 11.), die Axen der sechs übrigen sind imaginär (10.).

16. Drei beliebige von diesen sechs Nullsystemen bestimmen zu-

sammen dasselbe Polarsystem wie die drei übrigen; z. B. die Nullsysteme $B_1B_2$, $C_1C_2$ und $A_3A_4$ liefern ebenso wie $B_3B_4$, $C_3C_4$ und $A_1A_2$ das Polarsystem, von welchem 12 21 34 43 ein Poltetraëder ist und dessen Ordnungsfläche durch die acht Kanten:

31 24, 13 42, 14 32, 41 23; 31 42, 13 24, 14 23, 41 32

der übrigen beiden Tetraëder $\varDelta_1$ geht. Von den zehn Polarsystemen hat das durch $A_1A_2$, $B_1B_2$ und $C_1C_2$ bestimmte die drei $\varDelta_1$ und die drei $\varDelta$ zu Poltetraëdern und seine Ordnungsfläche ist imaginär; die Ordnungsflächen der neun übrigen sind reell und gehen durch je vier paar Gegenkanten der $\varDelta_1$ (vgl. 14.). Jede dieser 10 Ordnungsflächen ist ihre eigene Polare bezüglich der neun übrigen, weil in einem beliebigen der 10 Polarsysteme die 18 Tetraëderkanten theils sich selbst theils ihren Gegenkanten zugeordnet sind. — Durch die 6 Nullsysteme, 10 Polar- und 15 involutorischen Systeme sind, wie Herr F. Klein a. a. O. zuerst bemerkt hat, die Punkte und Ebenen des Raumes nach Kummer'schen Configurationen $(16_6, 120_2)$ gruppirt, deren 120 Geraden aus je acht Leitstrahlen der 15 involutorischen Systeme bestehen.

17. Ausser den soeben nachgewiesenen 10 Polarsystemen giebt es nur noch zweimal zwölf andere, in welchen die zusammengehörigen beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ einander zugeordnet sind. Durch je sechs Punkte der einen oder der andern Cf., welche ausserhalb einer Ebene $\varepsilon$ der Cf. liegen, geht die Ordnungsfläche von einem dieser 24 Polarsysteme; dieselbe berührt in den sechs Punkten paarweise die 12 Kanten von zwei Tetraëdern $\varDelta$ der Cf. und hat das dritte $\varDelta$, welchem $\varepsilon$ angehört, zum Poltetraëder. Bei der Cf. des regulären Octaëders z. B. ist die dem Octaëder umschriebene Kugel eine der 24 Ordnungsflächen (Fig. 2 und 3). Diese 24 Flächen sind alle reell, enthalten aber keine reellen Geraden. — Wir haben also eine Gruppe von 24 und eine von 10 Flächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ zu einander, und ausserdem eine Gruppe von 36 Flächen, in Bezug auf welche sie zu sich selbst polar sind. Die Flächen einer jeden dieser drei Gruppen sind bezüglich einer beliebigen der 70 Flächen theils zu sich selbst theils paarweise zu einander polar. Die harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$ ist, wie sich beweisen lässt, nur bezüglich dieser 70 Flächen zweiter Ordnung zu sich selbst polar, und in keinem anderen Nullsysteme als den 18 oben angegebenen sich selbst zugeordnet.

Strassburg i/E, den 22 Oct. 1882.

# SUR LES FONCTIONS UNIFORMES D'UN POINT ANALYTIQUE $(x, y)$.[1]

PAR

P. APPELL

à PARIS.

## I. *Sur les fonctions uniformes d'une variable $x$.*

1. Soit $f(x)$ une fonction uniforme de la variable $x$ ayant un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots a_n$. Dans le domaine du point singulier $a_k$, cette fonction est représentée par une série convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)}(x - a_k)^\nu \; ; \quad (k = 1, 2, \ldots . n);$$

pour les valeurs de $x$ dont le module surpasse le plus grand des modules des nombres $a_1, a_2 \ldots . a_n$, cette même fonction est représentée par la série

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu \left(\frac{1}{x}\right)^\nu.$$

Théorème I. *Les nombres $A_{-1}^{(k)}$ et $A_1$ satisfont à la relation*

$$A_1 = \sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}. \tag{1}$$

[1] La plupart des résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 13 mars 1882.

En effet l'intégrale $\int f(x)\,dx$ prise dans le sens positif le long d'une circonférence ayant pour centre le point $x = 0$ et entourant les $n$ points $a_1, a_2 \ldots . a_n$ est égale à $2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}$; et, si l'on pose $x = \frac{1}{x'}$, cette même intégrale se réduit à l'intégrale

$$-\int f\left(\frac{1}{x'}\right) \frac{dx'}{x'^2}$$

prise dans le sens négatif sur une circonférence entourant le seul point singulier $x' = 0$, intégrale qui est égale à $2\pi i\, A_1$.

*Remarque.* La décomposition d'une fonction rationnelle $R(x)$ en fractions simples résulte immédiatement de l'application du théorême I à la fonction de $\xi$

$$R(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right]$$

2. Soient $C_1, C_2, \ldots . C_n$ $n$ cercles se coupant ou non, ayant pour centres respectifs les points $a_1, a_2 \ldots . a_n$. Appelons espace $E$ la portion du plan des $x$ extérieure à la fois à tous ces cercles; la ligne $L$ qui limite cet espace $E$ consiste en une ou plusieurs courbes fermées composées d'arcs de cercle. Désignons par $\varphi(x)$ une fonction de $x$ uniforme dans l'espace $E$ et n'ayant dans cet espace aucun point singulier. (Nous supposons par conséquent que le point $x = \infty$ n'est pas un point singulier de $\varphi(x)$).

Théorême II. *La fonction $\varphi(x)$ est développable en une série de la forme*

$$\varphi(x) = A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{(x - a_k)^\nu} \tag{2}$$

*convergente en tous les points de l'espace $E$.*

Pour démontrer ce théorême, considérons l'intégrale

$$\int \varphi(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right] d\xi$$

prise sur le contour $L$ dans un sens tel que l'espace $E$ soit à gauche du

point décrivant $\xi$, les points $x$ et $x_0$ étant deux points quelconques de l'espace $E$. On voit immédiatement que cette intégrale est égale à

$$2\pi i\,[\varphi(x) - \varphi(x_0)]$$

Comme le contour d'intégration $L$ se compose d'arcs appartenant aux circonférences $C_1$, $C_2$, .... $C_n$, l'on aura

$$(3) \qquad 2\pi i\,[\varphi(x) - \varphi(x_0)] = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} \varphi(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right] d\xi,$$

l'indice $C_k$ indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise le long des arcs de la circonférence $C_k$ qui appartiennent à la ligne $L$. Pour toutes les valeurs de $\xi$ telles que

$$(4) \qquad \text{mod. } (\xi - a_k) < \varepsilon_k \text{ mod. } (x - a_k), \quad \varepsilon_k < 1$$

la fonction $\frac{1}{\xi - x}$ de la variable $\xi$ est développable en une série uniformément convergente

$$(5) \qquad \frac{1}{\xi - x} = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\xi - a_k)^{\nu-1}}{(x - a_k)^{\nu}}$$

Or les valeurs que prend $\xi$ dans l'intégrale affectée de l'indice $C_k$ satisfont à l'inégalité (4); en remplaçant, dans cette intégrale, $\frac{1}{\xi - x}$ par le développement (5), la relation (3) devient la formule (2) où l'on fait

$$A = \varphi(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} \varphi(\xi) \frac{1}{\xi - x_0}\, d\xi$$

$$A_{\nu}^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\xi)(\xi - a_k)^{\nu-1}\, d\xi$$

3. Le théorème précédent II est un cas particulier du suivant.

Théorème III. *Une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans l'espace à contour simple ou multiple situé à l'extérieur de $n$ cercles de centres $a_1$, $a_2$, .... $a_n$*

*et à l'intérieur de m cercles de centres $b_1$, $b_2$, .... $b_m$ est développable, dans cette portion du plan, en une série convergente de la forme:*

$$\varphi(x) = C + \sum_{h=1}^{h=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu^{(h)} (x - b_h)^\nu + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} (x - a_k)^\nu$$

Ce théorême conduit à la démonstration donnée par M. Bourguet de l'expression

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} G_k\left(\frac{1}{x - a_k}\right) + G(x)$$

indiquée par M. Weierstrass pour une fonction uniforme ayant $n$ points singuliers $a_1$, $a_2$, .... $a_n$ à distance finie et un point singulier à l'infini. Il suffit pour cela de supposer que les cercles de centres $a_1$, $a_2$, .... $a_n$ aient des rayons infiniment petits, que le nombre $m$ soit égal à 1 et que le cercle correspondant ait un rayon infini.

*Remarque.* Les développements en série de fractions rationnelles qui font l'objet des § 2—3 conduisent à des conséquences intéressantes que j'ai indiquées dans les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Séance du premier mai 1882).

## II. *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).*

4. Soit

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

une équation algébrique irréductible représentant une courbe d'ordre $m$ et de genre $p$. Je suppose que, par une substitution linéaire l'on ait fait en sorte que le point $x = \infty$ ne soit pas un point critique pour la fonction algébrique $y$ de la variable $x$; alors, quand $x$ croît indéfiniment, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers $m$ valeurs finies distinctes $c_1$ $c_2$, .... $c_m$.

J'appelle, comme il est d'usage de le faire, point analytique $(x, y)$ le système formé par une valeur quelconque attribuée à $x$ et par une des $m$ valeurs correspondantes de $y$. Une fonction de la variable $x$ sera dite *fonction uniforme du point analytique* $(x, y)$ si cette fonction reprend la même valeur lorsque le point $(x, y)$ décrit un cycle quelconque.

Soit $(a, b)$ un point analytique non critique; j'appelle *domaine* $\delta$ du point $(a, b)$ l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point $(x, y)$ en partant du point $(a, b)$, $x$ restant assujetti à la condition

$$\text{mod.}\ (x - a) \leqq \delta.$$

Si le point $a$ est à l'infini on remplacera dans cette définition $x - a$ par $\frac{1}{x}$.

Soit $(a, b)$ un point critique; les valeurs de $y$ qui deviennent égales à $b$ pour $x = a$ se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires. J'appelle *domaine* $\delta$ du point $(a, b)$ *relatif à un de ces systêmes circulaires* l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point $(x, y)$ en partant de $(a, b)$ avec une des valeurs de $y$ appartenant à ce systême circulaire, $x$ restant assujetti à la condition

$$\text{mod.}\ (x - a) \leqq \delta.$$

5. *Pôles et points singuliers essentiels.* — Soit $(a, b)$ un point analytique non critique; il existe un domaine $\delta$ du point $(a, b)$ dans lequel il n'y a pas de point critique. Une fonction uniforme $f(x, y)$ du point analytique $(x, y)$ sera, dans ce domaine, une *fonction uniforme de* $x$. Si cette fonction uniforme de $x$ est régulière au point $a$, nous dirons que la fonction $f(x, y)$ du point analytique est régulière au point $(a, b)$. Si, au contraire, cette même fonction uniforme de $x$ admet le point $a$ pour pôle ou pour point singulier essentiel, nous dirons que le point analytique $(a, b)$ est un pôle ou un point singulier essentiel de $f(x, y)$.

Lorsque la fonction $f(x, y)$ est régulière au point $(a, b)$, l'on a dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (x - a)^\nu;$$

lorsque le point $(a, b)$ est un pôle de $f(x, y)$, l'on a dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\alpha}^{\nu=\infty} A_\nu (x - a)^\nu;$$

le nombre positif entier $\alpha$ est appelé *degré* du pôle $(a, b)$ et le coefficient

$A_{-1}$ *résidu* relatif à ce pôle. Enfin, lorsque le point $(a, b)$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(x, y)$ et qu'en outre il existe un domaine $\delta' < \delta$ du point $(a, b)$ dans lequel il n'y a plus ni pôles ni points singuliers essentiels, on a, dans ce domaine $\delta'$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (x-a)^\nu;$$

dans ce cas, le point singulier essentiel sera dit *point singulier essentiel isolé,* et le coefficient $A_{-1}$ sera appelé *résidu* de la fonction $f(x, y)$ relatif au point $(a, b)$.

Dans les définitions précédentes il faut remplacer $(x-a)$ par $\frac{1}{x}$ quand $a = \infty$.

Supposons maintenant que $(a, b)$ soit un point critique de la fonction algébrique $y$ de $x$ et considérons un système circulaire de $q$ racines $y_1, y_2 \ldots . y_q$ se permutant autour de ce point. Si l'on fait

$$x = a + x'^q, \tag{7}$$

ces $q$ racines sont, dans un certain domaine du point $(a, b)$ relatif au système circulaire considéré, représentées par le même développement en série

$$y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \lambda_\nu x'^\nu. \tag{8}$$

Remplaçons, dans la fonction $f(x, y)$, $x$ et $y$ par les expressions (7) et (8); $f(x, y)$ deviendra une fonction de la variable $x'$ uniforme dans un certain domaine du point $x' = 0$. Nous dirons que la branche de la fonction $f(x, y)$ relative au système circulaire considéré est régulière au point $(a, b)$, admet ce point pour pôle ou pour point singulier essentiel suivant que la fonction uniforme de $x'$ que nous venons de définir est régulière au point $x' = 0$, admet ce point pour pôle ou pour point singulier essentiel.

Lorsque la branche considérée de la fonction $f(x, y)$ est régulière au point $(a, b)$, on a, dans un certain domaine du point $x' = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu x'^\nu;$$

lorsque le point $(a, b)$ est un pôle pour cette branche, on a, dans un certain domaine du point $x' = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\alpha}^{\nu=+\infty} A_\nu x'^\nu;$$

le nombre entier positif $\alpha$ sera appelé degré du pôle, et le produit $qA_{-q}$ sera appelé résidu de la branche considérée de la fonction relatif au pôle $(a, b)$.

Lorsque le point $(a, b)$ est un point singulier essentiel pour cette branche de la fonction $f(x, y)$ et qu'en outre il existe un domaine $\delta$ du point $(a, b)$ relatif au système circulaire considéré tel que, dans ce domaine, il n'y ait plus ni pôle ni point singulier essentiel de $f(x, y)$, on a, pour cette branche, le développement

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x'^\nu$$

valable dans un certain domaine du point $x' = 0$. Dans ce cas le point $(a, b)$ est appelé *point singulier essentiel isolé* pour la branche considérée, et le produit $qA_{-q}$ est appelé *résidu* relatif à ce point.

Il faut remarquer que, si dans les développements précédents suivant les puissances de $x'$, on remplace $x'$ par sa valeur $(x - a)^{\frac{1}{q}}$ tirée de (7), le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ est précisément $A_{-q}$. Nous introduisons le facteur $q$ dans la définition du résidu pour donner aux théorèmes un énoncé général s'appliquant à la fois aux points critiques et aux points non critiques.

### *Fonctions ayant un nombre fini de points singuliers.*

6. On a d'abord le théorème suivant:

*Une fonction uniforme du point analytique $(x, y)$ qui n'a d'autres points singuliers que des pôles est une fonction rationnelle de $x$ et $y$.*

(Voir Briot, Théorie des fonctions abéliennes, Note B.)

7. Voici maintenant la généralisation du théorème I § 1.

Théorème IV. *Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme du point analytique $(x, y)$ ayant un nombre fini de points singuliers $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, .... $(a_n, b_n)$ et soient $R_1$, $R_2$, .... $R_n$ les résidus relatifs à ces points; soit de plus dans un certain domaine du point analytique* $(x = \infty, \lim \frac{y}{x} = c_k)$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu}, \quad (k = 1, 2, \ldots . m);$$

*on a la relation*

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(m)} = R_1 + R_2 + \ldots . + R_n. \tag{9}$$

Pour démontrer cette relation, il suffit d'appliquer le théorème I à la fonction uniforme de $x$

$$f_1(x) = f(x, y_1) + f(x, y_2) + \ldots . + f(x, y_m),$$

$y_1$, $y_2$, .... $y_m$ désignant les $m$ valeurs de $y$ qui répondent à la valeur $x$.

Il est évident que $f_1(x)$ est une fonction uniforme de $x$ ayant les $n$ points singuliers $a_1$, $a_2$, .... $a_n$. Supposons, pour prendre le cas le plus général, que le point singulier $(a_k, b_k)$ soit un point critique autour duquel se permutent $q$ racines $y_1$, $y_2$, .... $y_q$. On a, dans un certain domaine de ce point,

$$f(x, y_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}};$$

désignons par $\omega$ une racine primitive de l'équation binôme

$$\omega^q - 1 = 0.$$

Si la variable $x$ fait le tour du point $a_k$, $y_1$ devient $y_2$ et $(x - a_k)^{\frac{1}{q}}$ est multiplié par $\omega$; donc

$$f(x, y_2) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^\nu (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}}.$$

On a de même

$$f(x, y_3) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^{2\nu} (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}};$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$f(x, y_q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^{(q-1)\nu} (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}}.$$

Si nous faisons la somme de ces $q$ développements

$$f(x, y_1) + f(x, y_2) + \dots + f(x, y_q),$$

nous voyons que les termes qui contiennent $(x - a_k)$ élevé à une puissance fractionnaire disparaissent et que le coefficient de $\frac{1}{x - a_k}$ est $q\lambda_{-q}$, c'est à dire le résidu $R_k$. Ainsi la fonction uniforme $f_1(x)$ admet le point singulier $a_k$ avec le résidu $R_k$.

D'autre part dans le domaine du point $\infty$ on a

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu};$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans ce développement est

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \dots + A_1^{(m)}.$$

Donc en appliquant à la fonction $f_1(x)$ la relation (1) on obtient précisément la relation à démontrer (9).

*Remarque* I. Si une fonction uniforme du point $(x, y)$ qui a un nombre fini de points singuliers n'a pas de points singuliers à l'infini et devient en chacun des $m$ points analytiques éloignés indéfiniment infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$ ou d'un ordre supérieur, la somme des résidus de cette fonction est nulle. En effet, dans cette hypothèse, les $m$ nombres $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots A_1^{(m)}$ sont nuls; donc

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = 0.$$

*Remarque* II. Dans le cas particulier où la fonction $f(x, y)$ est rationnelle en $x$ et $y$, la relation (9) est l'expression analytique de ce théorème de Riemann que la somme des résidus logarithmiques de l'intégrale d'une fonction algébrique est nulle.

8. Avant de poursuivre cette étude, rappelons quelques propriétés des intégrales Abéliennes dont il sera fait usage plus loin.

Désignons par

$$(10) \qquad u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \varphi_i(x, y) dx \qquad (i = 1, 2, \ldots . p)$$

les $p$ intégrales Abéliennes normales de première espèce, et par $\theta$ $(u_1, u_2, \ldots . u_p)$ ou plus simplement $\theta(u_i)$ une des fonctions $\theta$ correspondantes.

L'intégrale Abélienne normale de troisième espèce qui admet les deux points critiques logarithmiques $(\xi, \eta)$, $(\xi', \eta')$ est

$$\Pi_{(\xi', \eta')}^{(\xi, \eta)} = \text{Log.} \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i] \,.\, \theta[- u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i]}{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i] \,.\, \theta[- u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k), \qquad (i = 1, 2, \ldots . p),$$

les $(p - 1)$ points $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ... $(x_{p-1}, y_{p-1})$ étant arbitraires. La fonction $\Pi_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta}$ ne dépend en aucune façon du choix de ces $(p - 1)$ points. (Voir: Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris par M. Emmanuel le 5 juillet 1879, p. 21 et suivantes.)

La dérivée de l'intégrale de troisième espèce $\Pi_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta}$ par rapport à $\xi$ est indépendante de $(\xi', \eta')$ et des $(p - 1)$ points $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, .... $(x_{p-1}, y_{p-1})$. Désignons cette dérivée changée de signe par $Z(\xi, \eta)$:

$$(11) \qquad Z(\xi, \eta) = - \frac{d\Pi_{(\xi', \eta')}^{(\xi, \eta)}}{d\xi} = - \frac{d}{d\xi} \,.\, \text{Log} \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\theta[- u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}.$$

Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ est l'intégrale Abélienne normale de seconde espèce qui est finie pour toutes les valeurs de $(x, y)$ excepté pour $x = \xi$, $y = \eta$; en ce point elle devient infinie du premier ordre et son résidu est égal à l'unité. Cette même fonction $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* du paramètre $(\xi, \eta)$ ayant pour pôles les points critiques et les points $(x, y)$ et $(x_0, y_0)$, ces derniers avec des résidus $- 1$ et $+ 1$. Cela résulte de la forme du second membre de l'équation (11) ou du théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales de troisième

espèce. (Voir Clebsch et Gordan, Theorie der Abelschen Functionen p. 120 et suiv.). Je rappelle enfin que la fonction $Z(\xi, \eta)$ du point $(x, y)$ admet $p$ périodes qui sont

$$\varphi_1(\xi, \eta), \quad \varphi_2(\xi, \eta), \ldots \varphi_p(\xi, \eta)$$

la fonction $\varphi_i$ étant la fonction rationnelle qui figure dans l'expression (10) de l'intégrale de première espèce $u^{(i)}(x, y)$.

Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ joue dans les recherches suivantes sur les fonctions du point analytique $(x, y)$ le même rôle que la fonction

$$\frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}$$

dans les recherches sur les fonctions uniformes de $x$. (§ 1, 2 et 3.) Si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ les $m$ valeurs de $\eta$ qui répondent à une valeur attribuée à $\xi$ dans l'équation $F(\xi, \eta) = 0$, on a

$$Z(\xi, \eta_1) + Z(\xi, \eta_2) + \ldots + Z(\xi, \eta_m) = \frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}.$$

Si le point $(\xi, \eta)$ coincide avec un point critique, les théorèmes précédents subissent des modifications que je n'indiquerai pas ici.

9. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de $x$ et $y$; la formule de Roch analogue à la formule de décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples (Journal de Crelle, t. 84, p. 294) s'obtient immédiatement en appliquant le théorème IV (relation (9)) à la fonction rationnelle de $(\xi, \eta)$

$$R(\xi, \eta) \, . \, Z(\xi, \eta). \tag{12}$$

Je vais le montrer ici en supposant pour plus de simplicité que la fonction $R(x, y)$ soit régulière aux $m$ points analytiques éloignés indéfiniment et en tous les points critiques. Soient alors

$$(a_1, b_1), \ (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)$$

les $n$ pôles de $R(x, y)$, le pôle $(a_k, b_k)$ étant d'ordre $s_k$. Dans un certain domaine du point $(a_k, b_k)$ on a

$$R(x,\ y) = \frac{A_1^{(k)}}{x - a_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{(x - a_k)^{s_k}} + B_0^{(k)} + B_1^{(k)}(x - a_k) + \dots$$

Cela posé, la fonction rationnelle (12) de $\xi$ et $\eta$ admet les $n$ pôles $(a_k,\ b_k)$ de $R(\xi,\ \eta)$, et les pôles de $Z(\xi,\ \eta)$ qui sont les points critiques et les points $(x,\ y)$, $(x_0,\ y_0)$. Le résidu de la fonction (12) relatif au pôle $(a_k,\ b_k)$ est

$$A_1^{(k)} Z(a_k,\ b_k) + A_2^{(k)} . Z'(a_k,\ b_k) + \frac{A_3^{(k)}}{1.2} . Z''(a_k,\ b_k) + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2..(s_k - 1)} . Z^{(s_k - 1)}(a_k,\ b_k),$$

en désignant par $Z^{(s)}(a,\ b)$ la dérivée d'ordre $s$ de $Z(\xi,\ \eta)$ par rapport à $\xi$ dans laquelle on a remplacé $(\xi,\ \eta)$ par $(a,\ b)$. Le résidu de la fonction (12) relatif au pôle $(x,\ y)$ est $-R(x,\ y)$, et le résidu relatif au pôle $(x_0,\ y_0)$ est $R(x_0,\ y_0)$. La fonction $Z(\xi,\ \eta)$ a encore des pôles aux points critiques, mais les résidus correspondants sont nuls, car l'intégrale

$$(13) \qquad \int Z(\xi,\ \eta) d\xi$$

reste finie aux points critiques. De plus la fonction rationnelle (12) est régulière aux $m$ points analytiques à l'infini et elle est en chacun de ces points infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{\xi^2}$, car l'intégrale (13) reste finie à l'infini. Donc, d'après la remarque I du § (7) la somme des résidus de la fonction (12) est nulle; ce qui donne la formule de Roch

$$(14) \quad R(x,\ y) = R(x_0,\ y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \left[ A_1^{(k)} Z(a_k,\ b_k) + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2..(s_k - 1)} Z^{(s_k - 1)}(a_k,\ b_k) \right]$$

Puisque le second membre de cette formule est une fonction rationnelle de $x$ et $y$, ses périodes sont nulles; ce qui donne les $p$ relations connues

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \left[ A_1^{(k)} \varphi_i(a_k,\ b_k) + A_2^{(k)} \varphi'_i(a_k,\ b_k) + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2..(s_k - 1)} . \varphi_i^{(s_k - 1)}(a_k,\ b_k) \right] = 0$$

où

$$i = 1,\ 2 \dots p.$$

Ces relations (15) peuvent d'ailleurs être démontrées directement en appliquant le théorème IV du § 7 aux $p$ fonctions rationnelles

$$R(\xi, \eta)\varphi_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2 \ldots . p.$$

10. Proposons-nous maintenant de trouver l'expression la plus générale d'une fonction uniforme $f(x, y)$ du point analytique $(x, y)$ partout régulière excepté au point singulier essentiel $(a, b)$.

Dans un certain domaine du point singulier $(a, b)$ on a

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu}. \tag{17'}$$

Considérons la fonction du point $(\xi, \eta)$

$$f(\xi, \eta)Z(\xi, \eta); \tag{16}$$

cette fonction admet un point singulier essentiel à savoir le point $(a, b)$ et le résidu relatif à ce point est égal à

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b);$$

tel est en effet le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le développement de la fonction (16) suivant les puissances de $(\xi - a)$. Cette même fonction admet les pôles $(x, y)$ et $(x_0, y_0)$ avec les résidus $-f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$; elle admet aussi pour pôles les points critiques avec des résidus nuls; enfin elle devient aux $m$ points analytiques à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{\xi^2}$. En appliquant à cette fonction (16) le théorème IV, Remarque I, on a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b). \tag{17}$$

Telle est l'expression cherchée de la fonction $f(x, y)$. La série qui sert à définir la fonction (17) est convergente tant que le point analytique $(x, y)$ est distinct du point $(a, b)$. En effet quand le point $(x, y)$ est distinct du point $(a, b)$ on peut toujours développer la fonction (16) en une série ordonnée suivant les puissances de $(\xi - a)$ convergente dans un certain domaine du point $(a, b)$. Dans ce qui suit nous désignerons par $G(x, y \mid a, b)$ la fonction uniforme la plus générale du point $(x, y)$

qui admet un seul point singulier, à savoir le point singulier essentiel $(a, b)$; une pareille fonction est représentée par la série (17).

Dans les raisonnements précédents on a supposé le point $(a, b)$ différent d'un point critique. Dans le cas où le point $(a, b)$ coinciderait avec un point critique autour duquel se permutent $q$ racines formant un système circulaire, on ferait d'abord la substitution

$$\xi = a + \xi'^q, \quad \eta = b + \eta';$$

et on égalerait à $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ le coefficient de $\frac{1}{\xi'^q}$ dans le développement de la fonction (16) suivant les puissances de $\xi'$.

Les coefficients $A_1, A_2 \ldots . A_\infty$ qui figurent dans les développements (17) et (17') satisfont aux $p$ relations suivantes:

$$\text{(18)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{\varphi_i^{(\nu-1)}(a, b)}{1.2..(\nu-1)} = 0, \ (i = 1, 2, \ldots p)$$

$\varphi_i^{(\nu-1)}(x, y)$ désignant la dérivée d'ordre $(\nu - 1)$ de $\varphi_i(x, y)$ par rapport à $x$. Les relations (18) résultent de ce que les périodes de la fonction (17) sont nulles; on les démontre directement en appliquant le théorème IV, (Remarque I) aux $p$ fonctions

$$f(x, y) \,.\, \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \ldots . p).$$

11. Les considérations employées dans le paragraphe précédent permettent d'obtenir de la même façon l'expression la plus générale d'une fonction uniforme du point analytique $(x, y)$ admettant les $n$ points singuliers $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)$. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces $n$ points sont à distance finie et qu'aucun d'eux ne coincide avec un point critique. Soit $f(x, y)$ la fonction cherchée; dans un certain domaine du point singulier $(a_k, b_k)$, cette fonction est développable en une double série de la forme

$$\text{(19)} \qquad f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{(x - a_k)^\nu}.$$

Considérons la fonction uniforme du point $(\xi, \eta)$

$$\text{(20)} \qquad f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta).$$

Cette fonction admet comme points singuliers: 1°) les $n$ points $(a_k, b_k)$ comme points singuliers essentiels, 2°) les deux points $(x, y)$ et $(x_0, y_0)$ comme pôles, 3°) les points critiques comme pôles. Le résidu de la fonction (20) relatif au point $(a_k, b_k)$ est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2..(\nu-1)} \cdot Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k);$$

les résidus de cette même fonction relatifs aux pôles $(x, y)$ et $(x_0, y_0)$ sont $-f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$; enfin les résidus relatifs aux points critiques sont nuls. Comme on peut appliquer à cette fonction la remarque I du théorème IV, on a la relation

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2..(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k); \tag{21}$$

ce qui donne l'expression cherchée de la fonction $f(x, y)$. On voit que cette expression est de la forme

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y \mid a_k, b_k),$$

les fonctions $G_k$ étant des fonctions telles que (17).

Les coefficients $A_\nu^{(k)} \binom{k=1, 2, \ldots n}{\nu=1, 2, \ldots \infty}$ satisfont aux $p$ relations

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{\varphi_i^{(\nu-1)}(a_k, b_k)}{1.2..(\nu-1)} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{22}$$

que l'on obtient en appliquant encore le théorème IV aux $p$ fonctions

$$f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \ldots p).$$

12. L'on peut généraliser les théorèmes exposés dans les § 2 et 3 de la façon suivante.

Voici d'abord la généralisation du théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction de $x$ holomorphe dans l'intérieur d'un cercle de centre $a$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $(x-a)$.

Théorème V. *Soit $(a, b)$ un point non critique et $\delta$ un nombre positif tel que dans le domaine $\delta$ du point $(a, b)$ il n'y ait pas de point critique;*

*soit de plus $f(x, y)$ une fonction du point analytique $(x, y)$ uniforme et régulière en tous les points analytiques situés* **en dehors** *du domaine $\partial$ du point $(a, b)$. Cette fonction est développable en une série de la forme*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu-1)}(a, b) \tag{23}$$

*convergente en tous les points analytiques extérieurs au domaine $\partial$.*

En effet, soient $(x, y)$ et $(x_0, y_0)$ deux points analytiques situés à l'extérieur du domaine $\partial$ du point $(a, b)$; considérons un domaine $\rho$ du point $(x, y)$ et un domaine $\rho_0$ du point $(x_0, y_0)$ n'empiétant pas l'un sur l'autre ni sur $\partial$ et ne contenant pas de points critiques. L'on a l'équation

$$\int_\rho f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{\rho_0} f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta) d\xi + \int_\partial f(\xi, \eta) \,.\, Z(\xi, \eta) d\xi = 0, \tag{24}$$

les indices $\rho$, $\rho_0$, $\partial$ indiquant que les intégrales qui en sont affectées sont prises dans le sens positif sur les circonférences limitant les domaines $\rho$, $\rho_0$ et $\partial$. Pour démontrer l'équation (24) traçons dans le plan des $x$ les lacets de première espèce et les $m$ circuits. (Voir Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, p. 180, fig. 58.) Nous pouvons toujours tracer ces lacets et ces circuits de façon qu'ils ne pénètrent pas dans les domaines $\rho$, $\rho_0$, $\partial$, et que ces trois domaines soient dans l'intérieur de la circonférence des circuits. Cela posé, prenons l'intégrale

$$\int f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi \tag{25}$$

sur le contour fermé constitué par la droite $ol$, la circonférence du circuit dans le sens positif (le sens de la flèche sur la fig. 58), la droite $lo$, et enfin la suite des lacets . . . $a_4$, $a_3$, $a_2$, $a_1$ jusqu'au point 0. Comme on peut parcourir ce contour fermé en prenant successivement au départ chacune des $m$ racines $\eta_1, \eta_2, \ldots . \eta_m$ correspondant à la valeur initiale de $\xi$, l'on obtient $m$ valeurs de l'intégrale (25) sur le contour indiqué; je dis que la somme de ces $m$ valeurs est nulle. D'abord, dans chaque intégrale, la partie relative à la circonférence du circuit est nulle, car à l'extérieur de cette circonférence chacune des branches de la fonction intégrée est holomorphe et développable en une série convergente de la forme

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \lambda_\nu \cdot \frac{1}{\xi^\nu};$$

puis, les portions d'intégrale relatives aux droites *ol* et *lo* se détruisent. Il reste donc à montrer que la somme des intégrales prises sur les lacets est nulle; or cela résulte de ce que la somme des $q$ intégrales relatives aux $q$ lacets d'un système circulaire de $q$ racines se permutant autour d'un point critique est égale à zéro. (La démonstration est la même que celle que donnent M.M. Briot et Bouquet pour l'intégrale d'une fonction rationnelle, voir Théorie des fonctions elliptiques p. 174.) Il est d'ailleurs évident que la somme des $m$ valeurs considérées de l'intégrale (25) est égale au premier membre de l'équation (24); donc ce premier membre est nul, et la relation (24) est démontrée. La première des intégrales (24) est égale à

$$-2\pi i f(x, y),$$

la deuxième à

$$+2\pi i f(x_0, y_0).$$

On a donc l'équation

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi, \tag{26}$$

qui est une équation fondamentale pour la théorie des fonctions d'un point analytique. Dans le cas présent la fonction $Z(\xi, \eta)$ du point $(\xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de $\xi$ dans un domaine $\delta' > \delta$ du point $(a, b)$; elle est donc développable dans ce domaine en une série uniformément convergente par la formule de Mac-Laurin

$$Z(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(\xi - a)^\nu}{1.2..\nu} . Z^{(\nu)}(a, b). \tag{27}$$

Portant ce développement (27) dans la formule (26) on a la formule a démontrer (23) dans laquelle

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{1.2..(\nu-1)} \cdot \int_\gamma (\xi - a)^{\nu-1} f(\xi, \eta) d\xi. \tag{28}$$

13. Le théorème V démontré dans le § précédent peut être généralisé de la façon suivante.

Théorème VI. *Soient* $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, .... $(a_n, b_n)$ *des points non critiques et* $\delta_1, \delta_2, \ldots . \delta_n$ *des nombres positifs tels que, dans le domaine* $\delta_k$ *du point* $(a_k, b_k)$, *il n'y ait pas de point critique; soit de plus* $f(x, y)$ *une fonction du point analytique* $(x, y)$ *uniforme et régulière en tous les points analytiques* ***situés à la fois en dehors*** *de tous les domaines* $\delta_k$ *des points* $(a_k, b_k)$. *Cette fonction est développable en une série de la forme*

$$(29) \qquad f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k)$$

*convergente en tous les points analytiques extérieurs à la fois à tous les domaines* $\delta_k$.

La démonstration de ce théorême est en tout semblable à la précédente et repose sur l'équation

$$(30) \qquad \int_P f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{P_0} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi + \sum_{k=1}^{k=n} \int_{\delta_k} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi = 0$$

qui est analogue à l'équation (24) et que l'on établit de la même façon.

Ces développements en série conduisent, pour les fonctions d'un point analytique $(x, y)$ à des conséquences analogues à celles que j'ai indiquées pour les fonctions d'une variable $x$. (Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Séance du 1er Mai 1882.) Je me réserve d'étudier cette question dans une autre circonstance.

14. *Fonctions ayant une infinité de points singuliers.* — Voici, pour ces fonctions, la généralisation du théorême de M. Mittag-Leffler.

Théorème VII. *Soient une suite de points analytiques tous différents*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots . (a_\nu, b_\nu), \ldots .$$

*tels que*

$$\lim (a_\nu, b_\nu) = (a, b), \ (\nu = \infty);$$

*soient, d'autre part*

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots . f_\nu(x, y), \ldots .$$

*une suite de fonctions rationnelles de* $x$ *et* $y$ *ne devenant infinies respectivement qu'aux deux points* $(a_\nu, b_\nu)$ *et* $(a, b)$; *il existe une fonction uniforme* $\Phi(x, y)$ *du point analytique* $(x, y)$ *n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point* $(a, b)$ *et admettant pour pôles les points* $(a_\nu, b_\nu)$ *de telle façon que la différence*

$$\Phi(x, y) - f_\nu(x, y)$$

*soit régulière au point* $(a_\nu, b_\nu)$. (¹)

Supposons que le point $(a, b)$ *ne coïncide pas* avec un point critique. Soit $\varepsilon$ un nombre réel positif moindre que l'unité, et $\delta$ un nombre positif tel que dans le domaine $\delta$ du point $(a, b)$ il n'y ait ni un point critique, ni le point initial arbitraire $(x_0, y_0)$ limite inférieure des intégrales $Z$.

Les points $(a_\nu, b_\nu)$ situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$ sont en nombre fini; parmi ces points se trouvent d'ailleurs les points $(a_\nu, b_\nu)$ qui coïncident avec des points critiques. Formons la somme des fonctions $f_\nu(x, y)$ en nombre fini correspondant à ces points $(a_\nu, b_\nu)$ situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ et désignons cette somme par $\Psi_1(x, y)$.

Considérons maintenant les points $(a_\nu, b_\nu)$ en nombre infini situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$; dans ce qui suit nous désignerons plus spécialement ces points par $(a_\nu, b_\nu)$ et par $f_\nu(x, y)$ les fonctions rationnelles correspondantes. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $\Psi(x, y)$ possédant à l'égard de ces points la propriété indiquée par le théorème. Pour avoir alors la fonction cherchée $\Phi(x, y)$, il suffira de prendre

$$\Phi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi(x, y).$$

Avant de commencer la démonstration, il importe d'abord de former l'expression analytique de la fonction rationnelle donnée $f_\nu(x, y)$ qui a un pôle au point $(a_\nu, b_\nu)$ et un autre pôle au point $(a, b)$. Supposons que le déterminant

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a, b) & \varphi_1'(a, b) & \varphi_1''(a, b) \ldots\ldots & \varphi_1^{(p-1)}(a, b) \\ \varphi_2(a, b) & \varphi_2'(a, b) & \varphi_2''(a, b) \ldots\ldots & \varphi_2^{(p-1)}(a, b) \\ . & . & . \;\ldots\ldots & . \\ . & . & . \;\ldots\ldots & . \\ \varphi_p(a, b) & \varphi_p'(a, b) & \varphi_p''(a, b) \ldots\ldots & \varphi_p^{(p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

---

(¹) Lors d'une visite que j'ai faite à Berlin au mois de Juillet de l'année 1882, M. WEIERSTRASS m'a appris qu'il était depuis longtemps en possession de ce théorème et d'autres dans le même genre. Un mémoire du grand géomètre sur les fonctions que M. APPELL nomme *fonctions uniformes d'un point analytique,* paraîtra prochainement dans les »Acta».

*Le rédacteur en chef.*

soit différent de zéro. Dans le domaine du point $(a_\nu, b_\nu)$ la fonction rationnelle $f_\nu(x, y)$ est développable en une série de la forme

$$f_\nu(x, y) = \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^{n_\nu}} + \frac{A_{n_\nu-1}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^{n_\nu-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\nu)}}{x-a_\nu} + A_0^{(\nu)} + \dots$$

$A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \dots A_{n_\nu}^{(\nu)}$ étant des constantes connues. Posons alors

$$(31) \quad \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta) = A_1^{(\nu)} Z(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)} Z'(\xi, \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2..(n_\nu-1)} Z^{(n_\nu-1)}(\xi, \eta)$$
$$+ B_1^{(\nu)} Z(a, b) + B_2^{(\nu)} Z'(a, b) + \dots + B_p^{(\nu)} Z^{(p-1)}(a, b),$$

les nombres $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \dots B_p^{(\nu)}$ étant déterminés par les $p$ équations du premier degré

$$(32) \quad \begin{cases} B_1^{(\nu)}\varphi_i(a, b) + B_2^{(\nu)}\varphi'_i(a, b) + \dots + B_p^{(\nu)}\varphi_i^{(p-1)}(a, b) \\ + A_1^{(\nu)}\varphi_i(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)}\varphi'_i(\xi\ \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2..(n_\nu-1)}\varphi_i^{(n_\nu-1)}(\xi, \eta) = 0 \\ i = 1, 2, \dots p \end{cases}$$

équations qui expriment que la fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est rationnelle en $x$ et $y$. Ces équations (32) donnent pour $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \dots B_p^{(\nu)}$ des expressions linéaires par rapport aux fonctions

$$\varphi_i(\xi, \eta), \quad \varphi'_i(\xi, \eta), \dots \varphi_i^{(p-1)}(\xi, \eta);$$

ces coefficients $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \dots B_p^{(\nu)}$ sont donc des fonctions rationnelles de $(\xi, \eta)$ *n'ayant d'autres pôles que les points critiques.* En remplaçant ces coefficients par leurs valeurs dans l'expression (31) on obtient pour $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ une fonction rationnelle de $x$ et $y$ n'ayant d'autres pôles que les points $(\xi, \eta)$ et $(a, b)$; cette même fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction rationnelle de $(\xi, \eta)$ n'ayant d'autres pôles que les points critiques, le point $(x, y)$ et le point $(x_0, y_0)$. La différence

$$f_\nu(x, y) - \psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$$

est une fonction rationnelle de $(x, y)$ régulière au point $(a_\nu, b_\nu)$ et n'ayant plus que le pôle $(a, b)$; en désignant cette différence par $g_\nu(x, y)$ nous aurons

$$\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = f_\nu(x, y) - g_\nu(x, y).$$

Cela posé, soient

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \ldots \varepsilon_\nu, \ldots \ldots$$

des nombres positifs dont la somme est finie, et soit $(\xi, \eta)$ un point situé dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$. Pour toutes les positions du point analytique $(x, y)$ situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(\xi - a)$ du point $(a, b)$ la fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $(\xi - a)$. En effet, cette fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de $\xi$ dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$ si le point $(x, y)$ est situé en dehors du domaine $\delta$ de ce point, ou dans le domaine $\varepsilon$.mod $(x - a)$ du point $(a, b)$ si le point $(x, y)$ est situé dans le domaine $\delta$ de ce point. Donc, si l'on fait, en particulier, $(\xi, \eta) = (a_\nu, b_\nu)$, on voit que, pour toutes les positions du point analytique situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$. mod $(a_\nu - a)$ du point $(a, b)$, la fonction $\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $a_\nu - a$. Soit cette série

$$\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \cdot \lambda_m^{(\nu)}(x, y); \tag{33}$$

les coefficients $\lambda_m(x, y)$ sont des fonctions rationnelles de $x$ et $y$ admettant le seul pôle $(a, b)$. En effet d'après la série de Taylor

$$\lambda_m^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{1.2\ldots m} \left| \frac{d^m \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^m} \right|_{(\xi, \eta) = (a, b)};$$

la dérivée $\frac{d^m \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^m}$ est d'après la composition de $\psi_\nu$ une fonction rationnelle de $(x, y)$ ayant pour pôles les deux points $(\xi, \eta)$ et $(a, b)$; donc le coefficient $\lambda_m^{(\nu)}(x, y)$ obtenu en remplaçant dans cette dérivée $(\xi, \eta)$ par $(a, b)$ n'a plus qu'un pôle, à savoir le point $(a, b)$. Si nous posons

$$h_\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{m=m_\nu} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y) \tag{34}$$

cette fonction $h_\nu(x, y)$ possède la même propriété d'avoir pour seul pôle le point $(a, b)$. En écrivant la série (33)

$$\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = h_\nu(x, y) + \sum_{m=m_\nu+1}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

on peut déterminer le nombre $m_\nu$ de telle façon que pour toutes les positions du point $(x, y)$ situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(a_\nu - a)$, le module de

$$\sum_{m=m_\nu+1}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

soit au plus égal à $\varepsilon_\nu$. Faisant alors

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x, y) &= \psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - h_\nu(x, y) \\ &= f_\nu(x, y) - g_\nu(x, y) - h_\nu(x, y) \end{aligned}$$

la série

$$\Psi(x, y) = \sum \Phi_\nu(x, y)$$

est absolument convergente et fournit la fonction cherchée $\Psi(x, y)$.

En effet, soit $(x, y)$ une position quelconque du point $(x, y)$ différente des points $(a_\nu, b_\nu)$ et du point $(a, b)$. Il existe un entier $\nu'$ tel que pour $\nu \geqq \nu'$ le point $(x, y)$ soit constamment situé en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon}$ mod $(a_\nu - a)$ du point $(a, b)$. Les points $(a_\nu, b_\nu)$ dont l'indice est moindre que $\nu'$ sont en nombre fini, et par suite la somme des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$ relatives à ces points est finie; quant aux points $(a_\nu, b_\nu)$ tels que $\nu \geqq \nu'$ leur nombre est infini, mais, d'après ce qui précède, on a pour tous ces points

$$\text{mod } \Phi_\nu(x, y) \leqq \varepsilon_\nu,$$

et la somme des modules des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$ correspondantes est encore finie.

La différence $\Psi(x, y) - f_\nu(x, y)$ est régulière au point $(a_\nu, b_\nu)$ d'après la forme même des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$.

Nous avons supposé plus haut que le déterminant $\Delta(a, b)$ est différent de zéro. Si ce déterminant est nul, on remarque que l'un des déterminants

$$\Delta_k(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(k)}(a, b) & \varphi_1^{(k+1)}(a, b) \dots & \varphi_1^{(k+p-1)}(a, b) \\ \varphi_2^{(k)}(a, b) & \varphi_2^{(k+1)}(a, b) \dots & \varphi_2^{(k+p-1)}(a, b) \\ \cdot & \cdot \quad \dots & \cdot \\ \varphi_p^{(k)}(a, b) & \varphi_p^{(k+1)}(a, b) \dots & \varphi_p^{(k+p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

où $k$ prend successivement les valeurs $1, 2, 3 \dots$ etc., est différent de zéro. Car si tous ces déterminants étaient nuls, la fonction rationnelle

$$C_1\varphi_1(x, y) + C_2\varphi_2(x, y) + \dots + C_p\varphi_p(x, y)$$

où $C_1, C_2, \dots C_p$ sont des constantes convenables, s'annulerait au point $(a, b)$ ainsi que *toutes ses dérivées;* ce qui est impossible. Alors si $\Delta_k(a, b) \gtrless 0$, il suffira, dans ce qui précède de remplacer $\psi_\nu(x\, y \mid \xi, \eta)$ par la fonction

$$A_1^{(\nu)}Z(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)}Z'(\xi, \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2..(n_\nu - 1)} Z^{(n_\nu - 1)}(\xi, \eta)$$

$$+ E_1^{(\nu)}Z^{(k)}(a, b) + E_2^{(\nu)}Z^{(k+1)}(a, b) + \dots + E_p^{(\nu)}Z^{(k+p-1)}(a, b);$$

la suite du raisonnement est identique.

15. Dans un prochain mémoire j'indiquerai la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme du point $(x, y)$ ayant un seul point singulier essentiel et n'ayant pas de pôles. J'indiquerai en même temps quelques théorèmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels, théorèmes qui se déduisent des précédents dans le cas de $p = 1$. (Voir au sujet des fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels une Note de M. Picard, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, tome LXXXIX p. 852, et une Note que j'ai publiée récemment dans les Comptes Rendus de la Séance du 3 Avril 1882.)

Klingenthal 2 Septembre 1882.

# SUR LES FONCTIONS UNIFORMES D'UN POINT ANALYTIQUE $(x, y)$. (SECOND MÉMOIRE).

PAR

P. APPELL,

Maître de conférences à l'Ecole Normale.

Le présent mémoire constitue la suite d'un travail publié précédemment sous le même titre dans ce Journal. Il contient la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme d'un point analytique $(x, y)$ ayant un seul point singulier essentiel, et une théorie des fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels. Je conserverai dans ce mémoire les notations employées dans le premier.

## I. *Décomposition en facteurs primaires.*

*Soient une suite de points analytiques tous différents*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots . (a_\nu, b_\nu), \ldots$$

*tels que*

$$\text{limite} \cdot (a_\nu, b_\nu) = (a, b) \text{ pour } \nu = \infty,$$

*et une suite de nombres positifs entiers*

$$m_1, m_2, \ldots . m_\nu, \ldots ;$$

*l'on peut former une fonction uniforme du point analytique $(x, y)$ admettant pour point singulier essentiel le point $(a, b)$ et pour zéros les points $(a_\nu, b^\nu)$ aux degrés de multiplicité $m_\nu$. $(\nu = 1, 2, \ldots \infty)$.*

Pour le démontrer, supposons que le point $(a, b)$ ne soit pas un point critique de la fonction algébrique $y$ de $x$ et que le déterminant

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a, b) & \varphi'_1(a, b) & \dots & \varphi_1^{(p-1)}(a, b) \\ \varphi_2(a, b) & \varphi'_2(a, b) & \dots & \varphi_2^{(p-1)}(a, b) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_p(a, b) & \varphi'_p(a, b) & \dots & \varphi_p^{(p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Considérons la fonction

$$(1) \qquad \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta) = \begin{bmatrix} \xi, & \eta \\ a, & b \end{bmatrix}^{m_\nu} e^{\lambda_1 Z(a, b) + \lambda_2 Z'(a, b) + \dots + \lambda_p Z^{(p-1)}(a, b)}$$

où l'on désigne par le symbole $\begin{bmatrix} \xi, & \eta \\ a, & b \end{bmatrix}$ l'expression

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \xi, & \eta \\ a, & b \end{bmatrix} = \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(a, b) + h_i]} \cdot \frac{\theta[-u^{(i)}(a, b) + h_i]}{\theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]} = e^{\Pi_{(a, b)}^{(\xi, \eta)}}.$$

Dans cette fonction (1) déterminons les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ de telle façon que $\omega_\nu(x, y)$ soit une fonction uniforme du point $(x, y)$. Pour cela il suffit d'écrire que cette fonction ne change pas quand le point $(x, y)$ décrit les $p$ cycles correspondant aux $p$ périodes de l'intégrale de deuxième espèce $Z(a, b)$. On a ainsi les $p$ équations

$$(3) \qquad m_\nu[u^{(i)}(\xi, \eta) - u^{(i)}(a, b)] + \lambda_1 \varphi_i(a, b) + \lambda_2 \varphi'_i(a, b) + \dots + \lambda_p \varphi_i^{(p-1)}(a, b) = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots p).$$

Déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ en fonction de $(\xi, \eta)$ par ces équations (3); si l'on substitue les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ ainsi obtenues dans la fonction (1), cette fonction devient une fonction uniforme du point $(x, y)$ qui admet un seul zéro à savoir le point $(\xi, \eta)$ et un seul point singulier à savoir le point singulier essentiel $(a, b)$.

Cela posé, soit $\delta$ un nombre positif tel que dans le domaine $\delta$ du point $(a, b)$ il n'y ait ni le point initial $(x_0, y_0)$ limite inférieure des intégrales $u^{(i)}(x, y)$, ni un point critique de la fonction algébrique $y$ de $x$. Désignons par $\varepsilon$ un nombre positif plus petit que l'unité; les points

$(a_\nu, b_\nu)$ qui sont situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$ sont en nombre fini; formons le produit des facteurs $\omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$ correspondant à ces points $(a_\nu, b_\nu)$ situés hors du domaine $\varepsilon\delta$, et désignons ce produit par $\Pi_1(x, y)$. Portons maintenant notre attention sur les points $(a_\nu, b_\nu)$ qui sont situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$ et qui sont en nombre infini; dans ce qui suit nous désignerons plus specialement ces points par $(a_\nu, b_\nu)$. Pour toutes les positions du point $(x, y)$ situées en dehors du domaine

$$\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a),$$

la fonction

$$\operatorname{Log} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$$

est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $(a_\nu - a)$:

$$(4) \qquad \operatorname{Log} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y).$$

En effet si le point $(x, y)$ est en dehors du domaine $\delta$ de $(a, b)$, la fonction $\operatorname{Log} \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de $\xi$ dans le domaine $\delta$; et si le point $(x, y)$ est dans le domaine $\delta$, cette même fonction est une fonction holomorphe de $\xi$ dans le domaine $\varepsilon . \bmod (x - a)$ du point $(a, b)$. Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_\nu \ldots .$ des nombres positifs dont la somme est finie; on pourra, d'après ce qui précède, déterminer un entier $l_\nu$ tel que le module de la somme

$$(5) \qquad \sum_{\mu=l_\nu+1}^{\mu=\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y)$$

soit au plus égal à $\varepsilon_\nu$ pour toutes les positions du point $(x, y)$ situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point $(a, b)$. Faisant alors

$$(6) \qquad \chi_\nu(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\mu=l_\nu} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y)$$

on voit que le produit

$$(7) \qquad \Pi_2(x, y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) \,.\, e^{-\chi_\nu(x, y)}$$

est convergent pour toutes les positions du point $(x, y)$ distinctes du point $(a, b)$. En effet, écrivons ce produit de la façon suivante

$$(8) \qquad \Pi_2(x, y) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty} \mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - \chi_\nu(x, y)}\ ;$$

soit $(x, y)$ un point analytique distinct de $(a, b)$. Il existe un entier $\nu'$ tel que pour $\nu \geqq \nu'$ le point $(x, y)$ soit en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point $(a\ b)$. Alors partageons la somme qui figure en exposant dans le second membre de (8) en deux parties: la première composée des termes dans lesquels $\nu < \nu'$, la seconde de ceux dans lesquels $\nu \geqq \nu'$. La première somme est finie comme composée d'un nombre fini de termes et la seconde est finie également, car pour $\nu \geqq \nu'$ on a

$$\mathrm{mod}\ [\ \mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - \chi_\nu(x, y)] \leqq \varepsilon_\nu.$$

La convergence du produit (7) est donc démontrée. Remarquons de plus que la fonction $\chi_\nu(x, y)$ est une fonction *rationnelle* de $x$ et $y$ n'ayant d'autre pôle que le point $(a, b)$. En effet on a, dans le développement (4),

$$\rho_\mu^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{1.2..\mu}\left[\frac{d^\mu\ \mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^\mu}\right]_{(\xi, \eta) = (a, b)},$$

et les dérivées successives de la fonction

$$\mathrm{Log}\ \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$$

par rapport au paramètre $\xi$ sont des fonctions rationnelles de $(x, y)$ ayant les deux seuls pôles $(\xi, \eta)$ et $(a, b)$. Comme pour obtenir $\rho_\mu(x, y)$ il faut remplacer, dans ces dérivées, $(\xi, \eta)$ par $(a, b)$, les coefficients $\rho_\mu(x, y)$ sont des fonctions rationelles ayant le seul pôle $(a, b)$; il en est donc de même de la fonction $\chi_\nu(x, y)$. Le produit (7) définit donc une fonction uniforme $\Pi_2(x, y)$ du point analytique $(x, y)$ possédant à l'égard des

points $(a_\nu, b_\nu)$ situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point $(a, b)$ les propriétés indiquées dans l'énoncé. La fonction

$$\Pi(x, y) = \Pi_1(x, y)\Pi_2(x, y)$$

est la fonction cherchée.

La fonction la plus générale possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé est

$$\Pi(x, y) \, . \, e^{G(x, y \mid a, b)}$$

où $G(x, y \mid a, b)$ est une fonction uniforme du point $(x, y)$ n'ayant d'autre point singulier que $(a, b)$.

*Remarque.* Si le déterminant $\varDelta(a, b)$ est nul, l'on pourra lever la difficulté comme on l'a déjà fait dans la généralisation du théoréme de M. Mittag-Leffler exposée dans le premier mémoire. Il suffira de remplacer la fonction qui est en exposant dans l'équation (1) par

$$\lambda_1 Z^{(k)}(a, b) + \lambda_2 Z^{(k+1)}(a, b) + \ldots + \lambda_p Z^{(k+p-1)}(a, b)$$

où $k$ désigne un entier convenablement déterminé. La suite de la démonstration est la même que plus haut.

## II. *Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels.*

Les théorémes généraux sur les fonctions uniformes d'un point analytique $(x, y)$ conduisent, dans le cas particulier où le genre $p$ est égal à l'unité, à des théorémes sur les fonctions uniformes doublement périodiques. Je vais indiquer, pour ces fonctions, les principaux théorémes analogues à ceux que j'ai exposés dans les recherches précédentes sur les fonctions uniformes d'un point analytique. Je supposerai que les fonctions uniformes dont je vais m'occuper admettent les deux périodes $\omega$ et $\omega'$; en désignant par $\theta_1(u)$ la fonction $\theta_1$ formée avec ces périodes, je poserai, avec M. Hermite,

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du}$$

et

$$Z^{(\nu)}(u) = \frac{d^\nu Z(u)}{du^\nu}.$$

*Fonctions ayant dans un parallélogramme des périodes un nombre fini de points singuliers.*

Soit $f(u)$ une fonction uniforme doublement périodique, ayant dans un parallélogramme des périodes un nombre fini de points singuliers.

Théorême I. *La somme des résidus de $f(u)$ relatifs aux points singuliers situés dans un même parallélogramme des périodes est égale à zéro.*

En effet l'intégrale

$$\int f(u)du$$

prise sur le contour du parallélogramme est égale à zéro en vertu des relations

$$f(u + \omega) = f(u), \qquad f(u + \omega') = f(u).$$

*Remarque.* Soit en particulier $f(u)$ une fonction uniforme doublement périodique n'ayant dans un parallélogramme des périodes d'autres points singuliers que des pôles. La décomposition de cette fonction en éléments simples par la formule de M. Hermite résulte de l'application du théorême I à la fonction doublement périodique de $u$

$$f(u)[Z(u - x) - Z(u - x_0)],$$

$x$ et $x_0$ étant deux points quelconques pris dans l'intérieur d'un parallélogramme des périodes.

II. *Expression générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(u)$ n'ayant, dans un parallélogramme des périodes, qu'un point singulier $a$.*

Dans un certain domaine du point $a$, la fonction $f(u)$ est représentée par une série de la forme

$$(9) \qquad f(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_{\nu-1}}{(x - a)^\nu},$$

où $A_0 = 0$ en vertu du théorême I.

Soient $x$ et $x_0$ deux points situés dans le parallélogramme des périodes; considérons la fonction de $u$

$$(10) \qquad f(u)\,[Z(u - x) - Z(u - x_0)];$$

cette fonction est une fonction uniforme doublement périodique de $u$ ayant, dans le parallélogramme des périodes, les trois points singuliers $a$, $x$ et $x_0$. Le premier point $u = a$ est un point singulier essentiel, et le résidu relatif à ce point est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots\nu} [Z^{(\nu)}(a-x) - Z^{(\nu)}(a-x_0)];$$

les deux autres points $u = x$ et $u = x_0$ sont des pôles de résidus respectifs $f(x)$ et $-f(x_0)$. On a donc, d'après le théorème I

$$(11) \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots\nu} [Z^{(\nu)}(a-x) - Z^{(\nu)}(a-x_0)].$$

En posant pour simplifier

$$C = f(x_0) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots\nu} Z^{(\nu)}(a-x_0)$$

on a

$$(12) \qquad f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots\nu} Z^{(\nu)}(a-x).$$

Telle est l'expression cherchée.

On obtiendra de même l'expression la plus générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(u)$ ayant, dans un parallélogramme des périodes $n$ points singuliers $a_1, a_2, \ldots . a_n$. Il suffit, pour cela, d'appliquer le théorème I à la fonction (10). On obtient ainsi, pour la fonction cherchée, l'expression

$$(13) \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2\ldots\nu} [Z^{(\nu)}(a_k - x) - Z^{(\nu)}(a_k - x_0)]$$

avec

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \ldots . + A_0^{(n)} = 0.$$

*Fonctions doublement périodiques ayant dans un parallélogramme des périodes une infinité de points singuliers ou présentant des lacunes.*

III. Soit un parallélogramme formé avec les périodes $\omega$, $\omega'$, et, dans l'intérieur de ce parallélogramme, un contour fermé $C$ formé d'une

ou plusieurs courbes fermées. Appelons espace $E$ la portion du plan située à l'intérieur du parallélogramme et à l'extérieur du contour $C$. Désignons par $f(u)$ une fonction holomorphe dans l'espace $E$ et admettant les deux périodes $\omega$, $\omega'$, c'est à dire reprenant les mêmes valeurs aux points homologues des côtés opposés du parallélogramme; enfin soient $x$ et $x_0$ deux points de l'espace $E$. L'intégrale

$$\int f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)]\,du \tag{14}$$

prise sur le contour du parallélogramme des périodes est égale à zéro, car la fonction de $u$ soumise à l'intégration est doublement périodique. D'autre part cette intégrale (14) se réduit à la somme de trois intégrales, l'une prise le long d'une petite circonférence entourant le point $x$, l'autre le long d'une petite circonférence entourant $x_0$ et la troisième prise le long du contour $C$. La première de ces intégrales est $2\pi i f(x)$, la seconde $-2\pi i f(x_0)$; on a donc

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)]\,du, \tag{15}$$

l'indice $C$ indiquant que l'intégrale est prise sur le contour $C$.

Cette équation (15) définit ainsi la fonction $f(x)$ dans l'espace $E$ et dans les espaces homologues au moyen des valeurs que prend cette fonction sur le contour $C$.

IV. Pour faire une application de la relation (15) supposons que le contour $C$ soit obtenu de la façon suivante. Considérons $n$ cercles $C_1, C_2, \ldots . C_n$ situés à *l'intérieur* du parallélogramme des périodes et ayant pour centres les points $a_1, a_2, \ldots . a_n$. Prenons pour espace $E$ la portion du plan située à l'intérieur du parallélogramme et à l'extérieur de ces cercles; le contour $C$ sera alors formé d'arcs de cercles appartenant aux circonférences $C_1, C_2, \ldots . C_n$. En désignant par $f(u)$ une fonction doublement périodique holomorphe dans l'espace $E$, on a, pour cette fonction, l'équation (15). Or l'intégrale qui figure dans cette équation se partage en une somme de $n$ intégrales prises respectivement sur les arcs des cercles $C_1, C_2, \ldots . C_n$ qui constituent le contour $C$:

$$(16)\qquad \int_C f(u)[Z(u-x)-Z(u-x_0)]\,du$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\int_{C_k} f(u)[Z(u-x)-Z(u-x_0)]\,du,$$

l'indice $C_k$ indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise sur les arcs du cercle $C_k$ qui font partie du contour $C$. Prenons en particulier l'intégrale

$$(17)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} f(u)[Z(u-x)-Z(u-x_0)]\,du;$$

la fonction de $u$, $Z(u-x)-Z(u-x_0)$, est holomorphe dans un cercle de centre $a_k$ et de rayon supérieur au rayon du cercle $C_k$. Cette fonction est donc, pour les valeurs de $u$ qui figurent dans l'intégrale (17), développable en une série uniformément convergente

$$(18)\qquad Z(u-x)-Z(u-x_0)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(u-a_k)^\nu}{1.2..\nu}[Z^{(\nu)}(a_k-x)-Z^{(\nu)}(a_k-x_0)].$$

Portant ce développement dans l'intégrale (17) on voit que cette intégrale devient égale à

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)}[Z^{(\nu)}(a_k-x)-Z^{(\nu)}(a_k-x_0)]$$

où

$$(19)\qquad A_\nu^{(k)}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{1.2..\nu}\int_{C_k}(u-a_k)^\nu f(u)\,du$$

Donc enfin on a, d'après les relations (15) et (16),

$$(20)\qquad f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}A_\nu^{(k)}[Z^{(\nu)}(a_k-x)-Z^{(\nu)}(a_k-x_0)],$$

ou en posant:

$$A = f(x_0) - \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(a_k - x_0)$$

(21) $$f(x) = A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(a_k - x).$$

*Remarque I.* La somme

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \dots + A_0^{(n)}$$

est nulle, car cette somme est égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(u)\, du.$$

*Remarque II.* Si l'on suppose que le nombre $n = 1$, on voit que toute fonction doublement périodique $f(u)$ holomorphe dans l'espace situé à l'intérieur du parallélogramme des périodes et à l'extérieur d'un cercle de centre $\alpha$ compris dans ce parallélogramme, est représentée dans cet espace par la série

(22) $$f(u) = A + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu)}(a - x).$$

## V. *Généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler.*

*Soient $a_1$, $a_2$, .... $a_\nu$, .... des points tous différents situés dans un parallélogramme des périodes et tels que, pour $\nu = \infty$, $\lim a_\nu = a$; soient en outre $f_1(x, a_1)$, $f_2(x, a_2)$ .... $f_\nu(x, a_\nu)$, .... des fonctions méromorphes doublement périodiques ayant respectivement pour pôles dans le parallélogramme les seuls points $a_\nu$ et $a$; il existe une fonction uniforme doublement périodique $F(x)$ admettant le point $a$ pour point singulier essentiel et les points $a_\nu$ pour pôles, de telle façon que la différence $F(x) - f_\nu(x, a_\nu)$ soit régulière au point $a_\nu$.*

La fonction $f_\nu(x, a_\nu)$ est de la forme

$$f_\nu(x, a_\nu) = \sum_{k=0}^{k=n_\nu} A_k^{(\nu)} Z^{(k)}(x - a_\nu) + \sum_{k=0}^{k=n'_\nu} B_k^{(\nu)} Z^{(k)}(x - a)$$

avec

$$A_0^{(\nu)} + B_0^{(\nu)} = 0.$$

La démonstration du théorème repose sur ce fait que, pour toutes les valeurs de $x$ telles que

$$\operatorname{mod} \frac{a_\nu - a}{x - a} < \varepsilon, \qquad \varepsilon < 1,$$

la fonction $f_\nu(x, a_\nu)$ est développable en série suivant les puissances croissantes de $(a_\nu - a)$:

$$f_\nu(x, a_\nu) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(a_\nu - a)^m}{1.2..m} \left[\frac{d^m f_\nu(x, a_\nu)}{da_\nu^m}\right]_{a_\nu = a}$$

On en conclut que l'on peut prendre dans le développement précédent un nombre $m_\nu$ de termes assez grand pour que, en posant

$$F_\nu(x) = f_\nu(x, a_\nu) - \sum_{m=0}^{m=m_\nu} \frac{(a_\nu - a)^m}{1.2..m} \left[\frac{d^m f_\nu(x, a_\nu)}{da_\nu^m}\right]_{a_\nu = a}$$

la série $F(x) = \sum F_\nu(x)$ soit absolument convergente dans le voisinage de tout point $x_0$ distinct des points $a_\nu$. Cette fonction $F(x)$ est la fonction demandée. La fonction la plus générale possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé est

$$F(x) + G(x \mid a)$$

où $G(x \mid a)$ désigne une fonction uniforme doublement périodique n'ayant dans un parallélogramme des périodes que le point singulier $a$.

## VI, *Décomposition en facteurs primaires.*

On déduit du théorème précédent la formation d'une fonction uniforme doublement périodique $\Phi(x)$ admettant les points $a_\nu$ pour zéros de degrés $n_\nu$, $(\nu = 1, 2 \ldots . \infty)$, n'ayant pas de pôles et admettant le point $a$ pour point singulier essentiel. Si l'on pose

$$p_\nu(x, a_\nu) = \left[\frac{\theta_1(x - a_\nu)}{\theta_1(x - a)}\right]^{n_\nu} e^{n_\nu(a_\nu - a)Z(x-a)},$$

la fonction $\Phi(x)$ sera de la forme

$$\Phi(x) = A\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} p_\nu(x, a_\nu) . e^{-n_\nu \sum_{m=1}^{m=m_\nu} \frac{(a-a_\nu)^{m+1}}{1.2..(m+1)} Z^{(m)}(x-a)}$$

les entiers $m_\nu$ étant convenablement choisis. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le théorème V à la fonction $\frac{d \log \Phi(x)}{dx}$ en prenant

$$f_\nu(x, a_\nu) = \frac{d \log p_\nu(x, a_\nu)}{dx}.$$

VII. L'on voit que, dans cette théorie des fonctions doublement périodiques, la fonction élémentaire analogue à

$$\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}$$

dans la théorie des fonctions uniformes d'une variable et à $Z(\xi, \eta)$ dans la théorie des fonctions uniformes d'un point analytique est

$$Z(u-x) - Z(u-x_0).$$

De même que $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* de $\xi$ et $\eta$ admettant les deux pôles $(x, y)$, $(x_0\ y_0)$ avec les résidus respectifs $-1$ et $+1$, cette fonction $Z(u-x) - Z(u-x_0)$ est une fonction *doublement périodique* de $u$ admettant les deux pôles $x$ et $x_0$ avec les résidus $+1$ et $-1$. Le théorème exprimé par l'équation (15) est analogue à un théorème de Cauchy ainsi énoncé: si une fonction $f(x)$ est holomorphe à *l'extérieur* d'une courbe fermée $C$, on a

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\xi)\left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}\right] d\xi.$$

Le théorème énoncé dans la Remarque II du N° IV est analogue à un théorème de Cauchy ainsi modifié: si une fonction $f(x)$ est holomorphe en tous les points situés à *l'extérieur* d'un cercle de centre $a$, cette fonction est, pour tous ces points, représentée par le développement

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{d^\nu \left[ \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-x_0} \right]}{da^\nu}.$$

J'ai indiqué ces analogies dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 9 octobre 1882. Il me reste à ajouter que mon illustre maître M. Hermite dans ses *Leçons à la Faculté des Sciences de Paris* 1882 rédigées par M. Andoyer a donné une méthode très-simple pour l'étude des fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels.

---

# DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DANS UNE AIRE LIMITÉE PAR DES ARCS DE CERCLE

PAR

P. APPELL

à PARIS.

*Exemple I.*

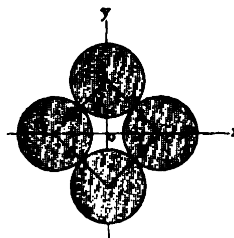
Considérons quatre cercles ayant pour rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour centres les points

$$+1, \quad +i, \quad -1, \quad -i.$$

L'espace situé à *l'extérieur* de ces quatre cercles est composé de deux parties

1°) Une aire finie $ABCD$ qui contient l'origine $O$.

2°) Une aire indéfinie.




Je vais former par la méthode générale indiquée dans les Comptes Rendus [1] une série de fractions rationnelles qui converge dans ces deux aires et qui, dans l'aire finie $ABCD$, a pour somme 1 et dans l'aire indéfinie est égale à 0. D'après la méthode générale ce développement sera de la forme

$$(1) \qquad 1 = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-1)^n} + \frac{A_n^{(i)}}{(x-i)^n} + \frac{A_n^{(-1)}}{(x+1)^n} + \frac{A_n^{(-i)}}{(x+i)^n}\right].$$

Les coefficients de ce développement sont donnés par les formules suivantes:

$$A_n^{(1)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{DA}(z-1)^{n-1}dz$$

[1] Séance du premier Mai 1882.

l'indice $DA$ indiquant que l'intégration est faite sur l'arc de cercle $DA$. Si l'on pose

$$z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta i}$$

il faudra faire varier $\theta$ de $-\frac{3\pi}{4}$ à $-\frac{5\pi}{4}$. Donc

$$A_n^{(1)} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{5\pi}{4}} e^{n\theta i} i \, d\theta = \frac{(-1)^n}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{4}$$

On trouve de même

$$A_n^{(i)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} (z - i)^{n-1} dz = \frac{(-i)^n}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{4}$$

$$A_n^{(-1)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{BC} (z + 1)^{n-1} dz = \frac{1}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{4}$$

$$A_n^{(-i)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{CD} (z + i)^{n-1} dz = \frac{i^n}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{4}$$

En portant ces valeurs dans le développement (1) l'on obtient la série cherchée

$$(2) \qquad 1 = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{Sin} \frac{n\pi}{4}}{n 2^{\frac{n}{2}}} \left[ \frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n} \right]$$

Cette égalité (2) a lieu pour tous les points $x$ situés dans l'aire $ABCD$. La série qui forme le second membre est encore convergente dans l'espace indéfini situé en dehors des quatre cercles; mais sa somme est alors *nulle*.

Dans le cas actuel il serait aisé de *sommer directement* la série (2). En effet remarquant que

$$\operatorname{Sin} \frac{n\pi}{4} = \frac{e^{\frac{n\pi i}{4}} - e^{-\frac{n\pi i}{4}}}{2i}$$

et que la série

$$u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^n}{n} + \dots$$

a pour somme la valeur de $-\operatorname{Log}(1-u)$ qui s'annule avec $u$, l'on voit que la série

$$(3) \qquad \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(1-x)^n}$$

a pour somme la valeur de

$$(3') \qquad \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+i-2x}{1-i-2x}\right)$$

qui s'annule pour $x=\infty$. Cette fonction (3') est holomorphe à l'extérieur du cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$; elle est représentée par la série (3) à l'extérieur de ce cercle. Au point $x=0$ la fonction (3') et, par suite, la fonction (3) prennent la valeur $\frac{1}{4}$.

Faisant la même remarque pour chacune des séries partielles qui constituent la série (2), l'on voit que cette série a pour somme

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i}\left[\operatorname{Log}\frac{1+i-2x}{1-i-2x}+\operatorname{Log}\frac{1+i-2xi}{1-i-2xi}+\operatorname{Log}\frac{1+i+2x}{1-i+2x}+\operatorname{Log}\frac{1+i+2xi}{1-i+2xi}\right]$$

où il faut prendre pour chacun des logarithmes la détermination qui s'annule à l'infini. Ces quatre logarithmes sont des fonctions holomorphes de $x$, le premier à l'extérieur du cercle de centre $+1$, le second à l'extérieur du cercle de centre $+i$, le troisième du cercle de centre $-1$, le quatrième du cercle de centre $-i$; de plus chacun de ces logarithmes prend pour $x=0$ la valeur $\frac{\pi i}{4}$. Or la fonction (4) peut s'écrire

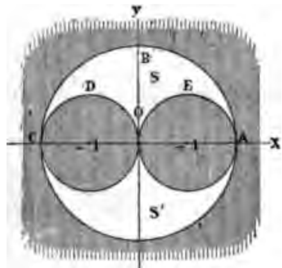
$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}\frac{(1+i-2x)(1+i-2xi)(1+i+2x)(1+i+2xi)}{(1-i-2x)(1-i-2xi)(1-i+2x)(1-i+2xi)},$$

d'après ce qui précède cette fonction (5) est holomorphe dans l'aire indéfinie située à l'extérieur des quatre cercles; mais elle est *constante* dans cette aire car elle se réduit à $\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}1$; donc elle est *nulle dans cette aire indéfinie* puisqu'elle est nulle à l'infini. Cette même fonction (5) est holomorphe dans l'aire finie *ABCD*; mais elle est constante dans cette aire, car elle est égale à $\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}1$; elle est donc *dans l'aire ABCD*

*égale à l'unité* puisqu'elle est égale à l'unité pour $x = 0$ comme nous l'avons vu.

*Exemple II.*

Pour indiquer un exemple dans lequel l'un des cercles limites tourne sa *concavité* vers l'intérieur de l'aire, considérons la surface située à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 2 et à l'extérieur des cercles de centres $-1$ et $+1$ et de rayon 1. Cette surface se compose de deux parties séparées $S$ et $S'$. Nous allons former une série de fractions rationnelles représentant *l'unité* dans l'aire $S$ et *zéro* dans $S'$.




Soit $x$ un point de l'aire $S$, on a

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z-x}, \tag{6}$$

l'intégration étant faite sur le contour de $S$

*ABCDOEA.*

En partageant l'intégrale en trois parties relatives aux trois demi-cercles qui limitent l'aire $S$, on a

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{ABC} \frac{dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{CDO} \frac{dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{OEA} \frac{dz}{z-x}.$$

Dans la première intégrale mod. $x <$ mod. $z$; donc

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \ldots;$$

dans la seconde mod. $(x+1) >$ mod. $(z+1)$

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{(x+1)} - \frac{z+1}{(x+1)^2} - \ldots - \frac{(z+1)^{n-1}}{(x+1)^n} - \ldots;$$

enfin dans la troisième

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x-1} - \frac{z-1}{(x-1)^2} - \ldots - \frac{(z-1)^{n-1}}{(x-1)^n} - \ldots.$$

Portant dans l'équation (6) et développant on a

$$(7) \qquad 1 = \frac{1}{2\pi i}\left[A_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A_n^{(0)}x^n + \frac{A_n^{(-1)}}{(x+1)^n} + \frac{A_n^{(1)}}{(x-1)^n}\right)\right].$$

Les valeurs des coefficients sont données par les formules suivantes:

$$A_0^{(0)} = \int\limits_{ABC}\frac{dz}{z} = \pi i$$

$$A_n^{(0)} = \int\limits_{ABC}\frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\int\limits_0^\pi e^{-n\theta i}i\,d\theta = \frac{1}{n2^n}[1-(-1)^n]$$

$$A_n^{(-1)} = -\int\limits_{CDO}(z+1)^{n-1}dz = -\int\limits_\pi^0 e^{n\theta i}i\,d\theta = -\frac{1}{n}[1-(-1)^n]$$

$$A_n^{(1)} = -\int\limits_{OEA}(z-1)^{n-1}dz = -\int\limits_\pi^0 e^{n\theta i}i\,d\theta = -\frac{1}{n}[1-(-1)^n].$$

L'on a donc le développement cherché

$$(8) \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left[\frac{x^n}{2^n} - \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n}\right]$$

La série qui forme le second membre converge encore dans l'aire $S'$ mais sa somme est alors *nulle.*

L'on peut encore ici se rendre compte a priori des propriétés de la série (8). Soit posé

$$(9) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left[\frac{x^n}{2^n} - \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n}\right]$$

Cette fonction existe dans les aires $S$ et $S'$. La série partielle

$$\sum_1^\infty \frac{1-(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{2^n}$$

définit une fonction holomorphe dans le cercle de centre 0 et de rayon 2; cette fonction est la détermination de

$$\operatorname{Log}\frac{2+x}{2-x}$$

qui s'annule pour $x = 0$. La série partielle

$$-\sum_{1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{(x+1)^n}$$

définit une fonction holomorphe à *l'extérieur* du cercle de centre — 1 et de rayon 1; c'est la détermination de

$$\operatorname{Log}\frac{x}{x+2}$$

qui s'annule à l'infini. Enfin la troisième série partielle est, dans tout l'espace situé en dehors du cercle de centre 1 et de rayon 1, égale à la détermination de

$$\operatorname{Log}\frac{x-2}{x}$$

qui s'annule à l'infini.

La fonction $\varphi(x)$ est donc holomorphe dans les deux aires $S$ et $S'$ et elle est égale dans ces aires à

$$\varphi(x) = \operatorname{Log}\frac{2+x}{2-x} + \operatorname{Log}\frac{x}{x+2} + \operatorname{Log}\frac{x-2}{x}$$

les logarithmes ayant les déterminations indiquées. Mais on voit immédiatement que le second membre est indépendant de $x$ et égal à Log (— 1). Donc $\varphi(x)$ est constant dans les aires $S$ et $S'$. Pour avoir la valeur constante de $\varphi(x)$ dans $S$ il suffit de prendre la valeur en un point de $S$, par exemple au point $x = \varepsilon i$, $\varepsilon$ étant positif et infiniment petit. Alors $\operatorname{Log}\frac{2+\varepsilon i}{2-\varepsilon i}$ est infiniment petit; quant à la somme $\operatorname{Log}\frac{x}{x+2} + \operatorname{Log}\frac{x-2}{x}$, elle est égale à la valeur que prend au point $\varepsilon i$ la détermination de $\operatorname{Log}\frac{x-2}{x+2}$ qui devient nulle à l'infini, la variable $x$ ne pouvant pas traverser la droite $AOC$. Or la valeur de ce logarithme au point $\varepsilon i$ est $\pi i$. Donc si $x$ est un point de l'aire $S$

$$\varphi(x) = \pi i;$$

on voit de même que, dans l'aire $S'$,

$$\varphi(x) = -\pi i.$$

Cela résulte encore de ce que la série (9) qui sert de définition à $\varphi(x)$ est une fonction *impaire*. La série (8) étant égale à

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\varphi(x)$$

a pour somme 1 dans l'aire $S$ et 0 dans $S'$.

*Remarque I.* Ces exemples ouvrent la voie à d'autres recherches sur un mode particulier d'existence des fonctions; l'on voit en effet que dans les exemples précédents l'on a composé des fonctions *holomorphes* avec des fonctions à déterminations multiples qui sont ici des logarithmes. Je me propose d'examiner si l'on ne peut pas obtenir des résultats analogues en remplaçant les logarithmes par d'autres fonctions à déterminations multiples comme par exemple

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}\,.$$

où $P(x)$ est un polynôme.

*Remarque II.* Si nous reprenons la série du premier exemple,

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n}\right],$$

nous voyons que la série $\psi'(x)$ constituée par les dérivées des termes de la série $\psi(x)$

$$\psi'(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{4}}{2^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{i}{(1+ix)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x)^{n+1}} + \frac{i}{(1-ix)^{n+1}}\right]$$

est convergente aux mêmes points que la série $\psi(x)$ et a constamment pour somme *zéro*. On le vérifie facilement, car si l'on remplace $\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{4}$ par $\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{n\pi i}{4}} - e^{-\frac{n\pi i}{4}}\right)$, l'on n'a plus qu'à sommer des progressions géométriques.

D'une façon générale, la série $\psi^{(k)}(x)$ constituée par les dérivées d'ordre $k$ des termes de la série $\psi(x)$ est convergente aux mêmes points que cette série $\psi(x)$ et a constamment pour somme *zéro*.

Soit alors $F(x)$ une série de fractions rationnelles convergente dans les mêmes régions que $\psi(x)$; la série

$$F(x) + \lambda_1\psi'(x) + \lambda_2\psi''(x) + \ldots + \lambda_k\psi^{(k)}(x)$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ sont arbitraires) est une série de fractions rationnelles possédant *les mêmes régions de convergence* et *la même somme* que $F(x)$. Par exemple la série

$$\psi(x) + \lambda_1\psi'(x) + \lambda_2\psi''(x) + \ldots + \lambda_k\psi^{(k)}(x)$$

possède les mêmes propriétés que $\psi(x)$.

Les remarques précédentes conduisent à une autre conséquence. Considérons, par exemple, la série

$$S(x) = \frac{1}{x^2} + \lambda\psi'(x)$$

où $\lambda$ désigne une constante; cette série $S(x)$ est convergente aux mêmes points que $\psi(x)$ et représente *une même fonction analytique* $\frac{1}{x^2}$ dans toutes ses régions de convergence. Intégrons cette série terme à terme, nous aurons une autre série de fractions rationnelles

$$S_1(x) = -\frac{1}{x} + \lambda\psi(x) + C$$

convergente aux mêmes points que $S(x)$, mais représentant dans les deux régions de convergence de $S(x)$ deux fonctions analytiques *différant par une constante arbitraire* $\lambda$. En effet $S_1(x) = -\frac{1}{x} + C$ dans l'espace indéfini extérieur aux quatre cercles; et $S_1(x) = -\frac{1}{x} + \lambda + C$ dans l'aire finie $ABCD$ qui comprend l'origine.

Donc, si une série de fractions rationnelles représente *une même fonction analytique* dans toutes ses régions de convergence et si la série obtenue en intégrant la proposée terme à terme est encore une série de fractions rationnelles, il peut arriver que cette série intégrale converge aux mêmes points que la proposée et représente dans les différentes régions de convergence des fonctions analytiques *différant par des constantes.*

---

# ZUR THEORIE DER QUADRATISCHEN RESTE,

VON

ERNST SCHERING.

GAUSS hat durch seine *Disquisitiones Arithmeticae* die Lehre von den ganzen Zahlen zu einer systematischen Wissenschaft erhoben. In diesem Werke gibt es wol nur eine Stelle, von welcher man behaupten kann, dass die systematische Anordnung durchbrochen ist, nemlich dort wo GAUSS zwischen die Untersuchung der Congruenzen ersten Grades und der Congruenzen zweiten Grades die Untersuchung der höheren Potenzreste einschaltet. Es erscheint mir, anstatt die höheren Potenzreste als das allgemeinere Gebiet, zu welchen die quadratischen Reste gehören, dort zu untersuchen, natürlicher, die quadratischen Congruenzen nicht nur für Primzahl-Moduln, welche von GAUSS fast ausschliesslich behandelt werden, sondern auch für zusammengesetzte Moduln vollständig zu erledigen.

Auf solche Weise erhält man nicht nur eine Reihe neuer Lehrsätze, sondern man gelangt auch unmittelbar zu der Charakteristik einer Zahl im Gebiete der quadratischen Reste in Bezug auf einen zusammengesetzten Modul, dieser Charakteristik, auf welche GAUSS bei seinem ersten Beweise für das Reciprocitäts-Gesetz in der Theorie der quadratischen Reste erst aufmerksam wurde, nachdem er das Reciprocitäts-Gesetz durch Induction gefunden hatte.

Die Wichtigkeit dieses ersten Beweises, welchen GAUSS am 8. April 1796 gefunden hat (Vergl. meine Bemerkungen Seite 475 zu GAUSS' *Werken* Band I), ist von DIRICHLET auch dadurch anerkannt, dass er der Wiedergabe desselben Beweises in übersichtlicher Form eine eigne Abhandlung gewidmet hat (Crelle's Journal Bd. XLVII, Berlin 1854, Seite

139 bis 150). Es mag deshalb mir gestattet sein, auf einigen Blättern den unmittelbaren Beweis eines von mir gefundenen für jene von GAUSS eingeführte Charakteristik geltenden besonders einfachen Satzes zusammenzustellen; eines Satzes, welcher sich dem grossen Meister bei Abfassung seiner Disquiss. Arithmm. wie auch später entzogen zu haben scheint, wol deshalb, weil er in jenem Werke die Behandlung der quadratischen Reste für zusammengesetzte Moduln vermieden hat.

Da für die Vergleichung der verschiedenen Beweise des Reciprocitäts-Satzes der Umfang der benutzten Theorien von besonderer Bedeutung ist, so will ich hervorheben, dass im Folgenden von dem Inhalte der Disquiss. Arithmm. nichts weiter vorausgesetzt wird als die erste Section, welche im Allgemeinen von den Congruenzen der Zahlen handelt, und die zweite Section, von den Congruenzen des ersten Grades, bis einschliesslich des Artikel 36.

Der in diesem Artikel bewiesene Lehrsatz lässt sich, mit Hinzufügung einer leicht zu erledigenden Vervollständigung so aussprechen: Ist zu jedem von mehreren mit einander theilerfremden Moduln A, B, C, D ... eine beliebige Zahl, beziehungsweise $a$, $b$, $c$, $d$ .. vorgegeben, so lässt sich zum Producte ABCD .. der Moduln als neuer Modul immer ein und nur ein Rest $z$ finden, welcher den einzelnen vorgegebenen Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ .. nach den bezüglichen Moduln A, B, C, D congruent ist: $z \equiv a$ (mod. A), $z \equiv b$ (mod. B), $z \equiv c$ (mod. C) ...

Ausserdem wird nur noch der Artikel 38 vorausgesetzt. Dieser bestimmt die EULERsche Function $\varphi$ (A), nemlich die Anzahl der positiven Zahlen, welche zu einer gegebenen positiven Zahl A theilerfremd und nicht grösser als dieselbe sind. Der Ausdruck für die EULERsche Function wird im Folgenden nicht benutzt sondern nur der Begriff derselben.

Zunächst wollen wir für den Fall, dass der Modul $m$ eine zusammengesetzte Zahl und dass die Zahl $a$ zu $m$ theilerfremd ist, die Anzahl der Wurzeln $x$ in der Congruenz

$$xx \equiv a \quad (\text{mod. } m)$$

bestimmen. Einige hierzu in enger Beziehung stehende bekannte Sätze will ich der Vollständigkeit wegen mit aufnehmen.

N. 1. Die ungerade Zahl $a$ ist dann und nur dann quadratischer Rest zum Modul 4, wenn sie die Form $a = 4k + 1$ hat. Für diesen

Fall besitzt die Congruenz $xx \equiv a$ (mod. 4) zwei von einander verschiedene Auflösungen nemlich:

(I) $$x \equiv +1 \text{ und } x \equiv -1 \pmod{4}.$$

N. 2. Die ungerade Zahl $a$ ist dann und nur dann quadratischer Rest zu einer die Zahl 4 übertreffende Potenz von 2, wenn sie die Form $a = 8k + 1$ hat. In der That, besteht die Congruenz $a \equiv x_\iota x_\iota$ (mod. $2^\iota$) und bestimmt man $h$ durch die Congruenz

$$x_\iota h \equiv \frac{a - x_\iota x_\iota}{2^\iota} \pmod{2^{\iota-2}},$$

setzt man ferner $$x_\sigma = x_\iota + h 2^{\iota-1}$$

so wird $x_\sigma x_\sigma \equiv a$ (mod. $2^{2\iota-2}$). Von der Potenz $2^\iota = 2^3$ gelangt man durch Wiederholung dieses Verfahren zu allen höheren Potenzen von 2 als Moduln.

N. 3. Für eine Zahl $a$ von der Form $8k + 1$ hat die Congruenz $xx \equiv a$ (mod. $2^{\pi_0}$), wenn $\pi_0 > 2$ ist, vier Auflösungen; bezeichnet $x_0$ eine derselben, so sind:

(II) $$x \equiv +x_0,\ x \equiv -x_0,\ x \equiv +x_0 + 2^{\pi_0-1},\ x \equiv -x_0 - 2^{\pi_0-1} \pmod{2^{\pi_0}}$$

jene vier von einander verschiedene Wurzeln. Die Zahl $xx - x_0 x_0$ wird nemlich, weil $x$ und $x_0$ ungerade sind, nur dann durch $2^{\pi_0}$ theilbar, wenn entweder $x - x_0$ oder $x + x_0$ durch $2^{\pi_0-1}$ theilbar ist.

N. 4. Ist $p$ eine ungerade Primzahl und ist die durch $p$ nicht theilbare Zahl $a$ quadratischer Rest zu $p$, so ist $a$ auch quadratischer Rest zu jeder Potenz von $p$ als Modul. In der That besteht die Congruenz $a \equiv x_\iota x_\iota$ (mod. $p^\iota$) und bestimmt man $h$ durch die Congruenz

$$2x_\iota h \equiv \frac{a - x_\iota x_\iota}{p^\iota} \pmod{p^\iota}, \text{ setzt dann } x_\sigma = x_\iota + hp^\iota$$

so wird $x_\sigma x_\sigma \equiv a$ (mod. $p^{2\iota}$). Auf solche Weise gelangt man von der Potenz $p^\iota = p$ durch Wiederholung zu jeder Potenz von $p$.

N. 5. Ist $p_\lambda$ eine ungerade Primzahl und ist die durch $p_\lambda$ nicht theilbare Zahl $a$ quadratischer Rest zu $p_\lambda$, so hat die Congruenz $xx \equiv a$ (mod. $p_\lambda^{\pi_\lambda}$) zwei Auflösungen; ist $x_\lambda$ eine derselben, so sind

(III) $$x \equiv +x_\lambda \text{ und } x \equiv -x_\lambda \pmod{p_\lambda^{\pi_\lambda}}$$

die beiden von einander verschiedenen Wurzeln, weil $xx - x_\lambda x_\lambda$ nur für diese beiden Fälle durch $p_\lambda^{\pi_\lambda}$ theilbar wird.

N. 6. Bezeichnet $m$ eine zusammengesetzte positive Zahl, hat also die Form

$$(IV) \qquad m = 2^{\pi_0} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_\mu^{\pi_\mu}$$

worin $p_1, p_2, p_3, .. p_\mu$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen und $\pi_1, \pi_2, \pi_3, .. \pi_\mu$ positive Zahlen bedeuten, während $\pi_0$ auch der Null gleich sein kann,

bezeichnet ferner $a$ eine zu $m$ theilerfremde Zahl,

so hat die Congruenz $xx \equiv a$ (mod. $m$) entweder keine oder $\psi(m)$ von einander verschiedene Auflösungen, wenn nemlich

$$(V) \qquad \begin{aligned} \psi(m) &= 2^\mu && \text{für } \pi_0 < 2, \\ \psi(m) &= 2^{\mu+1} && \text{für } \pi_0 = 2, \\ \psi(m) &= 2^{\mu+2} && \text{für } \pi_0 > 2 \text{ gesetzt wird.} \end{aligned}$$

Das Bestehen der Congruenz $xx \equiv a$ (mod. $m$) erfordert, dass $a$ quadratischer Rest zu jeder der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, .. p_\mu$ und

wenn $\pi_0 = 2$ ist, dass noch $a \equiv 1$ (mod. 4)

wenn aber $\pi_0 > 2$ ist, dass auch $a \equiv 1$ (mod 8) sei.

Umgekehrt reichen diese Bedingungen auch zur Möglichkeit der Erfüllung jener Congruenz aus, denn man braucht nur mit Hülfe des oben angegebenen Satzes aus dem Art. 36 der Disquiss. Arithmm. die Zahl $x$ so zu bestimmen,

(VI) dass sie je einer der beiden Congruenzen (III) für jedes $\lambda \equiv 1, 2, 3, ., \mu$;
und wenn $\pi_0 = 1$ ist, dass sie noch der Congruenz $x \equiv 1$ (mod. 2);
wenn aber $\pi_0 = 2$ ist, dass $x$ einer der beiden Congruenzen (I);
wenn endlich $\pi_0 > 2$ ist, dass $x$ einer der vier Congruenzen (II) genüge.

Zugleich erkennt man unmittelbar, dass verschiedene Verbindungen der für $x$ erforderlichen linearen Congruenzen auch einander nach dem Modul $m$ incongruente Werthe für $x$ ergeben, so dass also die Anzahl der verschiedenen Verbindungen der linearen Congruenzen gleich der Anzahl der Wurzeln der quadratischen Congruenz $xx \equiv a$ (mod. $m$) ist, wie es der Lehrsatz zu Anfang dieser N. 6 ausspricht.

Beispiel: Es ist $\psi(60) = \psi(4 . 3 . 5) = 2^3 = 8$; in der That die Wurzeln der Congruenz $xx \equiv 1$ (mod. 60) sind $x \equiv \pm 1, \pm 11, \pm 19,$

$\pm 29$ und von der Congruenz $xx \equiv -11 \pmod{60}$ sind $x \equiv \pm 7$, $\pm 13$, $\pm 17$, $\pm 23$, die Wurzeln, während jede zu 60 theilerfremde Zahl $a$, welche weder congruent $+1$ noch congruent $-11$ ist, einen quadratischen Nichtrest zum Modul 60 bedeutet.

N. 7. Die Anzahl der zum Modul $m$ theilerfremden quadratischen Reste ist $= \frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$, wie sich unmittelbar ergibt, wenn man jeden der $\varphi(m)$ zum Modul $m$ gehörenden theilerfremden Reste quadrirt und den Rest Modulo $m$ bildet, denn es entsteht dadurch nach dem Lehrsatze in N. 6. aus je. $\psi(m)$ der $\varphi(m)$ Reste immer wieder derselbe quadratische zu $m$ theilerfremde Rest.

N. 8. Die Anzahl der zum Modul $m$ theilerfremden quadratischen Nichtreste ist demnach $= \varphi(m) - \frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$. Beispiel: Es ist $\varphi(60) = 16$, $\psi(60) = 8$ und, wie in N. 6. gefunden, gibt es zum Modul 60 nur die zwei theilerfremden quadratischen Reste $+1$ und $-11$, die übrigen 14 theilerfremden Reste $-1$, $+11$, $\pm 7$, $\pm 13$, $\pm 17$, $\pm 19$, $\pm 23$, $\pm 29$ sind quadratische Nichtreste zum Modul 60.

N. 9. Die quadratische Congruenz $a \equiv xx \pmod{m}$ kann man als speciellen Fall der bilinearen Congruenz $a \equiv yz \pmod{m}$ auffassen. Benutzt man die letztere Congruenz, um für ein gegebenes, zu einem die Zahl 2 übertreffenden Modul $m$ theilerfremdes, $a$ sämmtliche $\varphi(m)$ theilfremden Reste als Werthe der $y$ und $z$ anzuordnen, so ergibt sich, dass dies für alle Reste, mit Ausschluss der Wurzeln $x$, möglich ist. Will man aber jene Anordnung auf sämmtliche $\varphi(m)$ Reste ausdehnen, so braucht man die quadratische Congruenz nur in die Form $a \equiv -x\,(m - x)$ zu setzen und erhält dann:

$$
\text{(VII)} \qquad
\begin{aligned}
&a \equiv -\,a_1 \,.\, a'_1 \pmod{m} \\
&a \equiv -\,a_2 \,.\, a'_2 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&a \equiv -\,a_{\frac{1}{2}\psi} \,.\, a'_{\frac{1}{2}\psi} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&a \equiv +\,a_{\frac{1}{2}\psi+1} \,.\, a'_{\frac{1}{2}\psi+1} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&a \equiv +\,a_{\frac{1}{2}\varphi} \,.\, a'_{\frac{1}{2}\varphi}
\end{aligned}
$$

wenn nemlich

(VIII) $$\pm a_1,\ \pm a_2, \ldots \pm a_{\frac{1}{2}\psi}$$

die $\psi(m)$ von einander verschiedenen Wurzeln $x$ der Congruenz $xx \equiv a$ (mod. $m$) bedeuten und

(VIII*) $$a'_1 = m - a_1,\ a'_2 = m - a_2, \ldots a'_{\frac{1}{2}\psi} = m - a_{\frac{1}{2}\psi}$$

gesetzt ist. Die Zahl $\alpha_{\frac{1}{2}\psi+1}$ wird als irgend ein von $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \ldots \alpha_{\frac{1}{2}\psi}, \alpha'_{\frac{1}{2}\psi}$ verschiedener zum Modul $m$ theilerfremde Rest ausgewählt, wenn solche noch vorhanden sind. Die durch die obige Congruenz bestimmte Zahl $\alpha'_{\frac{1}{2}\psi+1}$ muss dann offenbar von $\alpha_{\frac{1}{2}\psi+1}$ und von den vorgenannten $\psi(m)$ Resten verschieden sein. Sind damit noch nicht alle theilerfremden Reste berücksichtigt, so sei $\alpha_{\frac{1}{2}\psi+2}$ einer der übrigen. Der durch die obige Congruenz bestimmte Rest $\alpha'_{\frac{1}{2}\psi+2}$ ist dann ein von allen $2(\frac{1}{2}\psi + 1) + 1$ vorher schon in Betracht gezogenen Resten verschiedener zum Modul $m$ theilerfremder Rest. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens werden alle $\varphi(m)$ Reste in der Weise erschöpft werden, dass die in den vorstehenden Congruenzen (VII) auftretenden $\alpha$ und $\alpha'$ zusammen das vollständige System der $\varphi(m)$ zum Modul $m$ theilerfremden Reste

(IX) $$r_1, r_2, r_3 \ldots r_{\varphi(m)}$$

ausmachen.

Multipliciren wir die entsprechenden Seiten der obigen Congruenzen (VII) mit einander, so erhalten wir:

(X) $$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} . r_1 r_2 r_3 \ldots r_{\varphi(m)} \quad (\text{mod. } m)$$

wobei $a$ als quadratischer Rest vorausgesetzt war.

Die Zahl 1 ist quadratischer Rest zu $m$, wendet man sie als Werth von $a$ an, so erhält man aus der letzten Congruenz den Lehrsatz:

N. 10. Das Product der sämmtlichen $\varphi(m)$ zum Modul $m$ theilerfremden Reste ist congruent $(-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)}$,

(XI) $$r_1 . r_2 . r_3 \ldots r_{\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} \quad (\text{mod. } m).$$

Der entstehende Rest wird (zufolge N. 6) nur dann zu $-1$, wenn $m$ entweder gleich 4 oder gleich irgend einer Potenz einer ungeraden

Primzahl oder endlich gleich dem Doppelten einer solchen Potenz ist. Für alle andere Zahlen $m$ entsteht der Rest $+1$. In dieser Form hat GAUSS die Verallgemeinerung des WILSON'schen Satzes ausgesprochen. Disquiss. Arr. Art. 78. Von dem Beweise hat er eine Andeutung gegeben.

Beispiel: Es ist $1 \equiv -1 \,.\, 59 \equiv -11 \,.\, 49 \equiv -19 \,.\, 41 \equiv -29 \,.\, 31 \equiv \equiv 7 \,.\, 43 \equiv 13 \,.\, 37 \equiv 17 \,.\, 53 \equiv 23 \,.\, 47 \pmod{60}$ und $49 \equiv -7 \,.\, 53 \equiv -13 \,.\, 47 \equiv -17 \,.\, 43 \equiv -23 \,.\, 37 \equiv 1 \,.\, 49 \equiv 11 \,.\, 59 \equiv 19 \,.\, 31 \equiv 29 \,.\, 41$.

N. 11. Wendet man die bilineare Congruenz $b \equiv y \,.\, z \pmod{m}$ auf einen zu $m$ theilerfremden quadratischen Nichtrest $b$ an, um entsprechend wie in N. 9. das vollständige System der theilerfremden Reste für den Modul $m$ zu ordnen, so treten keine Ausnahmefälle wie bei einem quadratischen Reste $a$ ein, sondern in allen Congruenzen ist dasselbe Vorzeichen anzuwenden und man erhält

$$\text{(XII)} \qquad \begin{aligned} b &\equiv \beta_1 \,.\, \beta'_1 \pmod{m} \\ b &\equiv \beta_2 \,.\, \beta'_2 \\ b &\equiv \beta_3 \,.\, \beta'_3 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b &\equiv \beta_{\frac{1}{2}\varphi} \,.\, \beta'_{\frac{1}{2}\varphi} \end{aligned}$$

Hier bilden die $\beta_1 \ldots \beta_{\frac{1}{2}\varphi}$, $\beta'_1 \ldots \beta'_{\frac{1}{2}\varphi}$ wieder in einer besonderen Anordnung das vollständige System der zum Modul $m$ theilerfremden Reste $r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \ldots r_{\varphi(m)}$. Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser Congruenzen mit einander und berücksichtigt N. 10, so erhält man

$$\text{(XIII)} \quad b^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \beta_1 \ldots \beta_{\frac{1}{2}\varphi} \,.\, \beta'_1 \ldots \beta'_{\frac{1}{2}\varphi} \equiv r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \ldots r_{\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Beispiel: Es ist (modulo 60): $7 \equiv 1 \,.\, 7 \equiv 11 \,.\, 17 \equiv 13 \,.\, 19 \equiv 23 \,.\, 29 \equiv \equiv 31 \,.\, 37 \equiv 41 \,.\, 47 \equiv 43 \,.\, 49 \equiv 53 \,.\, 59$ und $11 \equiv 1 \,.\, 11 \equiv 7 \,.\, 53 \equiv 13 \,.\, 47 \equiv \equiv 17 \,.\, 43 \equiv 19 \,.\, 29 \equiv 23 \,.\, 37 \equiv 31 \,.\, 41 \equiv 49 \,.\, 59$.

Die Vergleichung der N. 9, 10, 11 gibt den

N. 12. LEHRSATZ. *Ist $a$ zum Modul $m$ theilerfremder quadratischer Rest, so wird*

$$\text{(XIV)} \qquad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \pmod{m}.$$

*Ist $a$ zum Modul $m$ theilerfremder quadratischer Nichtrest, so wird*

$$\text{(XV)} \qquad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}.$$

*Hat die bilineare Congruenz* $a \equiv y \,.\, z \pmod{m}$ *in ganzen positiven unter* $m$ *liegenden Zahlen* $y$ *und* $z$, *von welchen* $y$ *kleiner als* $z$ *ist,* $\frac{1}{2}\varphi(m)$ *Auflösungen, so muss* $a$ *quadratischer Nichtrest zu* $m$ *sein.*

*Beträgt die Anzahl jener Auflösungen aber weniger als* $\frac{1}{2}\varphi(m)$ *und ist* $a$ *theilerfremd zu* $m$, *so muss* $a$ *quadratischer Rest zum Modul* $m$ *sein, und die Anzahl jener Auflösungen wird* $\frac{1}{2}\varphi(m) - \frac{1}{2}\psi(m)$ *betragen.* Beispiel: Wenn jede der zum Modul 60 theilerfremden Zahlen quadrirt wird, so entsteht entweder der Rest 1 oder 49, also ist 7 quadratischer Nichtrest zu 60. Es ist $\frac{1}{2}\varphi(60) = 8$, $\frac{1}{2}\psi(60) = 4$, $7^8 \equiv (-11)^4 = 14641 \equiv 1 \equiv (-1)^4 \pmod{60}$.

Es ist (mod. 50):

$1 \equiv -1 \,.\, 49 \equiv 3 \,.\, 17 \equiv 7 \,.\, 43 \equiv 9 \,.\, 39 \equiv 11 \,.\, 41 \equiv 13 \,.\, 27 \equiv 19 \,.\, 29 \equiv 21 \,.\, 31 \equiv 23 \,.\, 37 \equiv 33 \,.\, 47$; $3 \equiv 1 \,.\, 3 \equiv 7 \,.\, 29 \equiv 9 \,.\, 17 \equiv 11 \,.\, 23 \equiv 13 \,.\, 31 \equiv 19 \,.\, 37 \equiv 21 \,.\, 43 \equiv 27 \,.\, 39 \equiv 33 \,.\, 41 \equiv 47 \,.\, 49$; ferner ist $\frac{1}{2}\varphi(50) = 10$, $\frac{1}{2}\psi(50) = 1$, $11^5 = 161051 \equiv 1 \pmod{50}$, also $11^{10} \equiv +1$ und $11 \equiv 19^2 \pmod{50}$ aber $3^{10} = 59049 \equiv -1 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(50)}$.

N. 13. Ausser der bilinearen Congruenz $a \equiv y \,.\, z \pmod{m}$ bietet für eine auf die Zahl $a$ sich beziehende Anordnung der Reste zum Modul $m$ die lineare Congruenz mit $a$ als constanten Factor, zum Beispiel $a \,.\, u \equiv v \pmod{m}$, Gelegenheit. Wählt man der Einfachheit halber für $u$ der Reihe nach die positiven unter den absolut kleinsten zum Modul $m$ theilerfremden Reste, sie mögen mit $r_1, r_2, \ldots r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ bezeichnet werden; so werden die zugehörigen $v$ zum Modul $m$ theilerfremd, und einander weder unmittelbar noch nach theilweiser Aenderung des Vorzeichens congruent sein. Nimmt man für $v$ auch absolut kleinste Reste, für $r'_1, r'_2 \ldots$ absolut kleinste positive Reste und setzt

$$
\text{(XVI)} \qquad
\begin{aligned}
a \,.\, r_1 &\equiv \eta_1 r'_1 \pmod{m} \\
a \,.\, r_2 &\equiv \eta_2 r'_2 \\
&\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a \,.\, r_{\frac{1}{2}\varphi(m)} &\equiv \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)} r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}
\end{aligned}
$$

indem man für $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ keine andere Werthe als $+1$ oder $-1$ zulässt, so sind also die Zahlen $r'_1, r'_2, \ldots r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ abgesehen von der Reihenfolge dieselben wie $r_1, r_2, \ldots r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$. Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser Congruenzen mit einander, dividirt dann die beiden Seiten der entstehenden Congruenz durch das zum Modul $m$

theilerfremde Product $r_1, r_2, \ldots r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ oder $r'_1, r'_2, \ldots r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$, so erhält man

$$\text{(XVII)} \qquad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}$$

und demnach unter Benutzung von N. 12 den

N. 14. LEHRSATZ: *Die Anzahl* $\eta(a, m)$ *der aus den Producten von* $a$ *multiplicirt in die positiven absolut kleinsten zum Modul* $m$ *theilerfremden Reste sich wieder für den Modul* $m$ *ergebenden absolut kleinsten aber negativen Reste oder die Anzahl der in absolut kleinsten positiven Resten* $u, v$ *dargestellten Lösungen der Congruenz* $a \cdot u + v \equiv 0 \pmod{m}$ *wird eine gerade Zahl wenn* $a$ *zum Modul* $m$ *theilerfremder quadratischer Rest das heisst die Congruenz* $a \equiv xx \pmod{m}$ *lösbar ist, dagegen wenn diese Congruenz nicht lösbar, sondern wenn* $a$ *zum Modul* $m$ *theilerfremder quadratischer Nichtrest ist, so wird jene Anzahl* $\eta(a, m)$ *mit* $\frac{1}{2}\psi(m)$ *das heisst mit der Anzahl der in absolut kleinsten positiven Resten dargestellten Lösungen* $w$ *der Congruenz* $aa \equiv ww \pmod{m}$ *gleichzeitig gerade oder ungerade.*

(XVIII) $a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \pmod{m}$, *wenn* $a$ *theilerfremder quadratischer Rest zu* $m$;

(XIX) $a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\psi(m)} \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \pmod{m}$, *wenn* $a$ *theilerfremder quadratischer Nichtrest zu* $m$.

Für den besonderen Fall, dass $m$ eine ungerade Primzahl ist, geht dieser Satz in den von GAUSS Januar 1808 aufgestellten Lehrsatz über, auf welchen er seinen dritten Beweis des Reciprocitäts-Gesetzes gründete (Art. 3. Seite 4, Band II meiner Reduction von GAUSS' Werken). Mein in der hier vorliegenden Abhandlung geführte Beweis geht für jenen besonderen Fall in den Beweis über, welchen DIRICHLET für den GAUSS'schen Satz in seinen frühesten Universitäts-Vorlesungen zu geben pflegte.

Beispiel. Für den Modul 60 ist 49 theilerfremder quadratischer Rest, aber 7 theilerfremder quadratischer Nichtrest, $\frac{1}{2}\varphi(60) = 8$, $\frac{1}{2}\psi(60) = 4$, $49^8 \equiv 11^8 \equiv (11^4)^2 \equiv (14641)^2 \equiv 1$, $7^8 \equiv 11^4 \equiv 1$, $\eta(49, 60) = 8$, $\eta(7, 60) = 4$, $49 . 1 \equiv -11$, $49 . 7 \equiv -17$, $49 . 11 \equiv -1$, $49 . 13 \equiv -23$, $49 . 17 \equiv -7$, $49 . 19 \equiv -29$, $49 . 23 \equiv -13$, $49 . 29 \equiv -19$,

$7.1 \equiv 7$, $7.7 \equiv -11$, $7.11 \equiv 17$, $7.13 \equiv -29$, $7.17 \equiv -1$, $7.19 \equiv 13$, $7.23 \equiv -19$, $7.29 \equiv 23$. Für den Modul 50 ist $11 \equiv 19^2$, also 11 theilerfremder quadratischer Rest aber 7 theilerfremder quadratischer Nichtrest, $\frac{1}{2}\varphi(50) = 10$, $\frac{1}{2}\psi(50) = 1$, $11^{10} \equiv 11^{5 \cdot 2} \equiv$ $\equiv 161051^2 \equiv 1$, $7^{10} \equiv (-1)^5 \equiv -1$, $\eta(11, 50) = 6$, $\eta(7, 50) = 5$, $11.1 \equiv 11$, $11.3 \equiv -17$, $11.7 \equiv -23$, $11.9 \equiv -1$, $11.11 \equiv 21$, $11.13 \equiv -7$, $11.17 \equiv -13$, $11.19 \equiv 9$, $11.21 \equiv -19$, $11.23 \equiv 3$, $7.1 \equiv 7$, $7.3 \equiv 21$, $7.7 \equiv -1$, $7.9 \equiv 13$, $7.11 \equiv -23$, $7.13 \equiv$ $\equiv -9$, $7.17 \equiv 19$, $7.19 \equiv -17$, $7.21 \equiv -3$, $7.23 \equiv 11$.

N. 15. Multiplicirt man beide Seiten so wie den Modul $m$ in den Congruenzen (XVI) mit derselben positiven Zahl $\delta$, setzt $M = \delta m$ und beachtet, dass die Gesammtheit der Producte

$$\delta . r_1, \ \delta . r_2, \ \delta . r_3, \ \ldots \ \delta . r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$$

die vollständige Reihe derjenigen zum Modul M gehörenden positiven absolut kleinsten $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{M}{\delta}\right)$ Reste bilden, welche mit M den grössten gemeinsamen Theiler $\delta$ besitzen, so erhält man den Satz:

*Die zu Eingang der* N. 14 *definirte Anzahl* $\eta(a, m)$ *oder* $\eta\left(a, \frac{M}{\delta}\right)$ *ist auch gleich der Anzahl der absolut kleinsten negativen Reste, welche sich für den Modul* M *aus den Producten der zu* M *theilerfremden Zahl* $a$ *multiplicirt in die zum Modul* M *gehörenden mit ihm den grössten gemeinsamen Theiler* $\delta$ *besitzenden positiven absolut kleinsten* $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{M}{\delta}\right)$ *Resten ergeben.*

N. 16. Die zum Modul $M$ gehörenden absolut kleinsten nothwendig positiv zu nehmenden Reste also die natürliche Zahlenreihe

entweder (XX) $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots \ \frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade ist,

oder (XXI) $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots \ \frac{M}{2} - 1$, wenn M gerade ist,

kann auch aufgefasst werden als die Gesammtheit derjenigen zum Modul M gehörenden absolut kleinsten positiven Reste, welche mit M je einen

von allen unter $\frac{M}{2}$ liegenden Theilern $\delta$ der Zahl M als grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Multiplicirt man mit der zu M theilerfremden Zahl $a$ jede Zahl des obigen Resten-Systems (XX) oder (XXI), bildet von diesen Producten die absolut kleinsten Reste für den Modul M, wendet die hier angedeutete Gruppirung jener Zahlen nach ihrem jedesmaligen mit M gemeinsamen grössten Theiler an und benutzt den in N. 15 aufgestellten Satz, so findet man den

N. 17. Lehrsatz: *Die Anzahl* $H(a, M)$ *der absolut kleinsten negativen Reste, welche in Bezug auf den Modul* M *den Producten*

$$\textit{entweder} \quad a.1, \quad a.2, \quad a.3, \ldots a\frac{M-1}{2}, \quad \textit{wenn} \ M \ \textit{ungerade},$$

$$\textit{oder} \quad a.1, \quad a.2, \quad a.3, \ldots a\left(\frac{M}{2}-1\right), \quad \textit{wenn} \ M \ \textit{gerade},$$

*congruent sind, wird, wenn die Zahl* $a$ *zu* M *theilerfremd ist, gleich*

$$\text{(XXII)} \quad H(a, M) = \sum_{\delta}\eta\left(a, \frac{M}{\delta}\right) = \sum_{m}\eta(a, m), \quad 1 \leqq \delta < \frac{M}{2}, \quad 2 < m \leqq M = m\delta$$

*worin die eine Summation über die sämmtlichen unter* $\frac{M}{2}$ *liegenden Theiler* $\delta$ *des Modul* M, *die andere Summation über die sämmtlichen die Zahl* 2 *übertreffenden Theiler* $m$ *des Modul* M *auszudehnen ist.*

Wählt man in diesem Satze die Zahl $a = -1$ und berücksichtigt, dass $\eta(-1, m) = \frac{1}{2}\varphi(m)$ ist, so erhält man den EULER'schen Summation's Satz für die $\varphi$ Function. Von diesem Satze werden wir hier aber keinen Gebrauch zu machen haben.

Beispiel. Es ist: $H(7, 60) = 13$, $\sum_{\delta}\eta\left(7, \frac{60}{\delta}\right) = \eta(7, 60) + \eta(7, 30) + \eta(7,20) + \eta(7,15) + \eta(7,12) + \eta(7,10) + \eta(7,6) + \eta(7,5) + \eta(7,4) + \eta(7,3) = 4 + 2 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 13$ Ferner ist: $H(7,45) = 9$, $\sum_{\delta}\eta\left(7, \frac{45}{\delta}\right) = \eta(7,45) + \eta(7,15) + \eta(7,9) + \eta(7,5) + \eta(7,3) = 4 + 2 + 2 + 1 + 0 = 9$.

N. 18. Ist M gerade, so wird für ein ungerades $a$

entweder $as \equiv +s' > 0$ und $a\left(\frac{M}{2} - s\right) \equiv \frac{M}{2} - s' > 0 \pmod{M}$

oder $as \equiv -s' < 0$ und $a\left(\frac{M}{2} - s\right) \equiv -\frac{M}{2} + s' < 0 \pmod{M}$

worin $s$ und $s'$ positive unter $\frac{M}{2}$ liegende Zahlen bedeuten.

Die absolut kleinsten negativen Reste werden also nicht anders als paarweise auftreten können, wenn jedes $s$ von $\frac{M}{2} - s$ verschieden also $\frac{M}{2}$ ungerade ist.

Für ein geradzahliges $\frac{M}{2}$ wird

$$a\frac{M}{4} \equiv +\frac{M}{4} \pmod{M}, \text{ wenn } a \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist,}$$

$$a\frac{M}{4} \equiv -\frac{M}{4} \pmod{M}, \text{ wenn } a \equiv 3 \pmod{4} \text{ ist.}$$

Wir erhalten demnach den Satz:

*Für einen geradzahligen Modul* M *und für ein ungerades* $a$ *wird die Anzahl* H$(a, M)$ *der den Producten*

$$a.1, \quad a.2, \quad a.3, \quad \ldots. \quad a.\left(\frac{M}{2} - 1\right)$$

*nach dem Modul* M *congruenten absolut kleinsten negativen Reste*

*eine gerade Zahl sein,* H$(a, M) \equiv 0 \pmod{2}$ *wenn* $M \equiv 2 \pmod{4}$ *oder wenn zugleich* $M \equiv 0$ *und* $a \equiv 1 \pmod{4}$ *ist;*

*dagegen wird sie ungeradzahlig,* H$(a, M) \equiv 1 \pmod{2}$, *wenn zugleich* $M \equiv 0$ *und* $a \equiv 3 \pmod{4}$ *ist.*

Beispiele: H(7, 30) = 8, H(5, 12) = 2, H(7, 60) = 13.

N. 19. Aus der Verbindung der Lehrsätze in N. 17 und 14 folgt

$$\text{(XXIII)} \qquad H(a, M) = \sum_m \eta(a, m) \equiv \sum_m{}' \tfrac{1}{2}\psi(m) \pmod{2}$$

worin $\sum\limits_{m}$ sich auf alle, die Zahl 2 übertreffenden, Theiler $m$ von M, dagegen $\sum\limits_{m}{}'$ sich nur auf diejenigen die Zahl 2 übertreffenden im Modul M enthaltenden Theiler $m$ bezieht, zu welchen $a$ quadratischer Nichtrest ist.

Wir haben also den Lehrsatz: Die Anzahl $\mathrm{H}(a, \mathrm{M})$ derjenigen absolut kleinsten negativen Reste, welche nach dem Modul M den Producten

$$\text{entweder} \quad a.1, \quad a.2, \quad a.3, \;..\; a\frac{\mathrm{M}-1}{2}, \quad \text{wenn M ungerade,}$$

$$\text{oder} \quad a.1, \quad a.2, \quad a.3, \;..\; a\left(\frac{\mathrm{M}}{2}-1\right), \quad \text{wenn M gerade,}$$

congruent sind, wird, für ein zu M theilerfremdes $a$, gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Gesammt-Anzahl aller in absolut kleinsten positiven Resten modulo $m$ dargestellten Lösungen $w$ der Congruenzen $1 \equiv ww \pmod{m}$ für die ganze Reihe derjenigen Moduln $m$, welche grösser als 2 und Theiler von M sind und zu welchen $a$ quadratischer Nichtrest ist.

Beispiel: Es ist $7 \equiv 1.1$ (mod. 6 und mod. 3) für alle anderen Theiler von 60 ist 7 quadratischer Nichtrest. Ferner ist $1 \equiv 1.1$ (mod. 4 und mod. 5 und mod. 10), $1 \equiv 1.1 \equiv 5.5$ (mod. 12), $1 \equiv 1.1 \equiv 4.4$ (mod. 15), $1 \equiv 1.1 \equiv 9.9$ (mod. 20), $1 \equiv 1.1 \equiv 11.11$ (mod. 30), $1 \equiv 1.1 \equiv 11.11 \equiv 19.19 \equiv 29.29$ (mod. 60) also $\sum\limits_{m}{}' \frac{1}{2}\psi(m) = \frac{1}{2}\psi(4) + \frac{1}{2}\psi(5) + \frac{1}{2}\psi(10) + \frac{1}{2}\psi(12) + \frac{1}{2}\psi(15) + \frac{1}{2}\psi(20) + \frac{1}{2}\psi(30) + \frac{1}{2}\psi(60) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 15$, endlich ist $\mathrm{H}(7, 60) = 13 \equiv 15$ (mod. 2).

N. 20. Wir beschränken jetzt unsere Untersuchung auf den Fall eines ungeraden M, welches also in der Form

$$\text{(XXIV)} \qquad \mathrm{M} = \mathrm{P}_1^{e_1}\,\mathrm{P}_2^{e_2} \ldots \mathrm{P}_\lambda^{e_\lambda} \,..\, \mathrm{P}_\nu^{e_\nu}$$

dargestellt werden kann, worin $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, .. \mathrm{P}_\lambda, .. \mathrm{P}_\nu$ von einander verschiedene positive Primzahlen und $e_1, e_2, .. e_\lambda, .. e_\nu$ irgend welche positive Zahlen bedeuten. Aus der Congruenz (XXIII) folgt dann, wenn

wir auch noch die in N. 6 gefundene Bestimmung von $\psi(m)$ und die übrigen dort ausgesprochenen Lehrsätze anwenden, die Congruenz:

$$\text{(XXV)} \qquad \mathrm{H}(a, \mathrm{M}) = \sum_m \eta(a, m) \equiv \sum_m{}' \tfrac{1}{2}\psi(m) \equiv \sum_m{}'' \tfrac{1}{2}\psi(m) = \sum_\lambda{}''' e_\lambda \pmod{2}.$$

Hierin erstreckt sich die Summation $\sum_m$ über alle Theiler $m$ von M, die Summation $\sum_m{}'$ über alle diejenigen in M enthaltenen Theiler $m$, zu welchen $a$ quadratischer Nichtrest ist, die Summation $\sum_m{}''$ über alle diejenigen in M enthaltenen Theiler $m$, welche je einzeln keine verschiedene Primzahlen enthalten und zu welchen $a$ quadratischer Nichtrest ist, endlich die Summation $\sum_\lambda{}''' e_\lambda$ über die in der Darstellung (XXIV) von M vorkommenden Exponenten derjenigen Primzahlen $\mathrm{P}_\lambda$, zu welchen die Zahl $a$ quadratischer Nichtrest ist.

Diese letzte Summe $\sum_\lambda{}''' e_\lambda$ bedeutet auch die Anzahl aller derjenigen gleichen und ungleichen in M enthaltenen Primfactoren, zu welchen $a$ quadratischer Nichtrest ist. Die Congruenz (XXV) gibt also den Lehrsatz:

*Die Anzahl* $\mathrm{H}(a, \mathrm{M})$ *derjenigen Producte*

$$a\,.\,1,\quad a\,.\,2,\quad a\,.\,3,\;\ldots\; a\frac{\mathrm{M}-1}{2}$$

*welche absolut kleinsten negativen Resten für den ungeradzahligen Modul* M *congruent sind, wird für ein zu* M *theilerfremdes* $a$ *gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Anzahl aller derjenigen gleichen und ungleichen in* M *enthaltenen Primfactoren, zu welchen* $a$ *quadratischer Nichtrest ist.*

Beispiel: Es ist $\mathrm{H}(7, 45) = 9$, $\sum{}' \tfrac{1}{2}\psi(m) = \tfrac{1}{2}\psi(5) + \tfrac{1}{2}\psi(15) + \tfrac{1}{2}\psi(45) = 1 + 2 + 2 = 5$; $\sum{}'' \tfrac{1}{2}\psi(m) = \tfrac{1}{2}\psi(5) = 1 \equiv 5 \equiv 9 \pmod{2}$ für $a = 7$, $\mathrm{M} = 45$. Dagegen für $a = 11$, $\mathrm{M} = 45$ wird $\mathrm{H}(11, 45) = 10$, $\sum{}' \tfrac{1}{2}\psi(m) = \tfrac{1}{2}\psi(3) + \tfrac{1}{2}\psi(9) + \tfrac{1}{2}\psi(15) + \tfrac{1}{2}\psi(45) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$, $\sum{}'' \tfrac{1}{2}\psi(m) = \tfrac{1}{2}\psi(3) + \tfrac{1}{2}\psi(9) = 1 + 1 = 2 \equiv 6 \equiv 10 \pmod{2}$.

N. 21. Es mag noch bemerkt werden, dass die oben benutzten Potenzen von $a$ und $b$ mit dem Exponenten $\frac{1}{2}\varphi(m)$ nicht wesentlich für diese Untersuchung sind, sondern hier nur gebraucht wurden, um an die üblichen Betrachtungen anzuschliessen. Ohne Herbeiziehung derselben wird die Entwickelung noch einfacher. Man hat dann den folgenden Lehrsatz aufzustellen:

*Die Anzahl aller Lösungen der Congruenzen*

(XXVI) $-x\left(\frac{M}{\delta}-x\right)\equiv a \left(\text{mod. } \frac{M}{\delta}\right)$ *in ganzen positiven unter* $\frac{M}{2\delta}$ *liegenden Zahlen* $x$,

(XXVII) $1\equiv -x'\left(\frac{M}{\delta}-x'\right) \left(\text{mod. } \frac{M}{\delta}\right)$ *in ganzen positiven unter* $\frac{M}{2\delta}$ *liegenden Zahlen* $x'$,

(XXVIII) $au\equiv -v$ (mod. M) *in ganzen positiven unter* $\frac{M}{2}$ *liegenden und mit* M *denselben beliebigen grössten unter* $\frac{M}{2}$ *liegenden gemeinsamen Theiler* $\delta$ *enthaltenden Zahlen* $u$, $v$,

*zusammengenommen ist für ein* M *theilerfremdes* $a$ *immer eine gerade Zahl.*

Es ist leicht zu sehen, dass man $u$ und $v$ anstatt aus dem System der absolut kleinsten positiven Reste des Modul M zu nehmen, sie auch aus irgend einem vollständigen halben Resten-System für den Modul M wählen kann, wenn man nemlich darunter ein System aller solcher Reste versteht, von denen keine zwei eine durch den Modul M theilbare Differenz oder Summe ergeben. Für den Fall, dass $a$ und M ungerade Zahlen bedeuten, ist es häufig von Vortheil die sämmtlichen unter M liegenden positiven entweder geraden oder ungeraden Zahlen als ein solches vollständiges halbes Resten-System für den Modul M zu benutzen.

Der Beweis des Lehrsatzes ergibt sich aus der Multiplication der entsprechenden Seiten aller Congruenzen, welche zunächst entstehen, wenn man sämmtliche Lösungen in jene Congruenzen (XXVI), (XXVII), (XXVIII) einsetzt, nachdem man die beiden Seiten und den Modul der Congruenz $au\equiv -v$ (mod. M) für jede Lösung durch $\delta$ dividirt hat,

und welche ferner noch entstehen, wenn man in die Congruenzen

(XXIX) $y \cdot z \equiv a \pmod{\frac{M}{\delta}}$ ihre Lösungen durch ganze positive unter $\frac{M}{\delta}$ liegende und die Bedingung $y$ kleiner als $z$ erfüllende Zahlen $y$, $z$ einsetzt, ebenso in

(XXX) $1 \equiv y' \cdot z' \pmod{\frac{M}{\delta}}$ ihre Lösungen durch ganze positive unter $\frac{M}{\delta}$ liegende und die Bedingung $y'$ kleiner als $z'$ erfüllende Zahlen $y'$, $z'$ einsetzt und schliesslich in

(XXXI) $au \equiv v \pmod{M}$ ihre Lösungen durch ganze positive unter $\frac{M}{2}$ liegende und jenen grössten mit M gemeinsamen Theiler $\delta$ enthaltende Zahlen $u$, $v$ einführt und beide Seiten und den Modul M dieser Congruenz für jede Lösung durch $\delta$ dividirt.

Die beiden Seiten der durch diese Multiplication sich ergebenden Congruenz besitzen nemlich, wie unmittelbar aus den Congruenz-Systemen (VII), (XII) und (XVI) hervorgeht, gleiche absolute zu $\frac{M}{\delta}$ theilerfremde Zahlenwerthe und müssen, da der Modul $\frac{M}{\delta}$ dieser Congruenz grösser als 2 ist, auch gleiche Vorzeichen haben.

N. 22. Die Begriffe der beiden Anzahlen, welche durch den Lehrsatz des N. 20 zu einander in Beziehung gesetzt werden, sind schon von Gauss aufgestellt. Nachdem er im März 1795 (wie er selbst in sein Handexemplar der Diss. Arr. eingeschrieben, G.-Werke Bd. I. Seite 476 meine Bemerkungen) das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste durch Induction gefunden hatte, welches er in Art. 131 der im Jahre 1801 herausgegebenen Disquiss. Arr. unter verschiedenen Formen darstellt, gerieth er am 29. Apr. 1796 (G.-Werke Bd. I. Seite 476) auf die Betrachtung der Anzahl der in einer gegebenen ungeraden Zahl P enthaltenen gleichen und verschiedenen Primfactoren, zu welchen eine andere gegebene Zahl Q quadratischer Nichtrest ist In Art. 133 der Disquiss.

Arr. zeigt er, dass wenn zwischen allen in der einen gegebenen ungeraden Zahl $Q$ enthaltenen Primzahlen einerseits und allen in der anderen gegebenen ungeraden Zahl $P$ enthaltenen Primzahlen andererseits das Reciprocitäts-Gesetz für die quadratischen Reste besteht, dann auch das analoge Reciprocitäts-Gesetz für die eben definirte Anzahl $(Q, P)$ und für diejenige entsprechende Anzahl $(P, Q)$ gilt, welche sich auf dieselben beiden gegebenen Zahlen aber nach ihrer Umwechselung bezieht. Der Begriff der hier definirten Anzahl ist dann für GAUSS ein wesentliches Hülfsmittel, um in den Artikeln 134 bis 136 den vollständigen Beweis für das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste durchzuführen.

JACOBI hat im Jahre 1837 (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaft zu Berlin Seite 135 »Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie»), wie es scheint ohne sich der betreffenden Stelle bei GAUSS bewusst zu sein, die gleichbedeutende Characteristik $\left(\frac{Q}{P}\right)$ eingeführt, welche den Werth entweder $-1$ oder $+1$ besitzt, je nachdem $Q$ entweder zu einer ungeraden oder zu einer nicht ungeraden Anzahl von gleichen und verschiedenen in $P$ enthaltenen Primfactoren quadratischer Nichtrest ist. JACOBI nennt dies das verallgemeinerte LEGENDRE'sche Zeichen und definirt es als das Product von allen LEGENDRE'schen Zeichen $\left(\frac{Q}{p_1}\right)\left(\frac{Q}{p_2}\right)\left(\frac{Q}{p_3}\right)\ldots\left(\frac{Q}{p_\nu}\right)$, worin die $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\nu$ die Gesammtheit aller derjenigen gleichen und verschiedenen Primfactoren ausmachen, deren Product gleich $P$ ist.

Auch der Begriff der anderen in dem Lehrsatze des N. 20 vorkommenden Anzahl, nemlich der Anzahl derjenigen absolut kleinsten negativen Reste, welche sich für eine zusammengesetzte ungerade Zahl $M$ als Modul aus den Producten einer zu $M$ theilerfremden Zahl $a$ multiplicirt in jeden einzelnen absolut kleinsten positiven Rest ergeben, ist von GAUSS untersucht und dafür der Reciprocitäts-Satz bewiesen in Art. 2 der Abhandlung »Theorematis Fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae» 1817 Febr. (G.-Werke Bd. II. S. 52.).

Von dem in N. 20 ausgesprochenen Satze hat GAUSS den speciellen Fall, wenn $M$ eine Primzahl bedeutet, aufgestellt und darauf schon seinen dritten Beweis des Reciprocitäts-Satzes gegründet; aber der allgemeine Lehrsatz für eine zusammengesetzte Zahl $M$ scheint sich ihm entzogen zu haben.

Meine Auffindung dieses Satzes ist in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876 Seite 330 veröffentlicht. Herr KRONECKER hat hieran mehrere Entwickelungen angeschlossen, in welcher er auch ausspricht, dass er vor meiner Mittheilung diesen Satz selbst gefunden habe. Er stützt seinen Beweis des Satzes auf die Kenntniss des vorausbewiesenen Reciprocitäts-Satzes.

N. 23. Die in N. 21 aufgestellte Form des Lehrsatzes halte ich deshalb für beachtenswerth, weil darin und in dem Beweise wesentlich nur die Abzählung der Auflösungen von bilinearen und von linearen Congruenzen auftritt und weil in meinem Beweise (1879) des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste keine andere Untersuchung als die Abzählung der Lösungen von linearen Congruenzen in Anwendung gebracht wird. Eine genaue Vergleichung dieses Beweises mit dem dritten (1808) und dem fünften (1817) Beweise von GAUSS, dem geometrischen Beweise von EISENSTEIN (1844), dem Beweise von Herrn ZELLER (1872), dem arithmetischen Beweise von Herrn KRONECKER (1876) und den beiden Beweisen von Sign. GENOCCHI (1852 und 1880) zeigt unter Benutzung des auf Seite 45 meiner Abhandlung »Bestimmung des quadratischen Rest-Characters» Göttingen 1879, ausgesprochenen Lehrsatzes, dass alle diese Beweise auf die Betrachtung der Anzahl verschiedenartiger Lösungen linearer Congruenzen zurückgeführt werden können.

N. 24. Es ist bemerkenswerth, dass diejenigen Gleichungen, welche den obigen bilinearen Congruenzen (VII) entsprechen, schon von EULER mehrfach, wenn auch nur für den Fall einer Primzahl $m$, angewendet worden sind: Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos. §. 20. §. 30. Op. anal. I. 1772. — Disquisitio accuratior circa residua ex divisione quadratorum altiorumque potestatum per numeros primos relicta §. 29. §. 50. Op. anal. Exhib. 1772. Maji 18. — Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia §. 25. N. comment. Petrop. XVIII. 1773 Exhib. 1772. Maj. 18. — Diese Abhandlungen sind abgedruckt: EULERI commentationes arithmeticae collectae. Edit. FUSS. Petrop. 1849. Tom. I. pag. 480, 482, 494, 505, 519. — EULER nennt für den Fall $a = 1$ und $m = p$ in der Gleichung $\alpha\alpha' = 1 + np$ die Zahlen $\alpha$ und $\alpha'$ residua sociata.

Göttingen 1882 November 9.

# SUR UN GROUPE DE THÉORÈMES ET FORMULES DE LA GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE

PAR

H. G. ZEUTHEN.

Lorsqu'on détermine le nombre de solutions d'une question algébro-géométrique, soit par les procédés de l'élimination algébrique, soit par les considérations géométriques plus expéditives qui la remplacent, celles de l'intersection des courbes ou du principe de correspondance, la difficulté principale qui se présente est la détermination de la multiplicité des solutions de différente nature. Pour surmonter cette difficulté on s'est servi parfois d'une méthode *indirecte,* en déduisant par différentes voies des expressions différentes du même nombre qui contiennent des coefficients inconnus, et en se servant de l'égalité de ces expressions pour déterminer les coefficients; (1) mais on a aussi des méthodes *directes.* Il serait trop long de citer tous les procédés, inventés par d'éminents géomètres (2) pour le dénombrement des intersections confondues de deux courbes; je me bornerai à rappeler que la plupart des méthodes reposent sur la considération des ordres des divergences infiniment petites des branches des courbes, ou bien des ordres de contact de ces branches. Des

---

(1) Dans ma thèse de doctorat 1865 sur *les systèmes de coniques* j'ai fait un usage régulier de ce procédé, qui m'a été utile aussi, à côté des déterminations directes, dans beaucoup d'autres recherches. M. SCHUBERT s'en est servi aussi dans ses nombreux travaux, dans le premier sans avoir vu l'usage que j'en avais fait déjà.

(2) M. M. CAYLEY, DE LA GOURNERIE, PAINVIN, HALPHEN, NÖTHER, STOLZ, SMITH.

considérations analogues peuvent servir au dénombrement des solutions coïncidentes résultant du principe de correspondance. ([1])

Cependant ces méthodes de dénombrement demandent toujours un certain travail. Pour déterminer le nombre de points d'intersection coïncidents entre eux de deux branches de courbes tangentes entre elles, il ne suffit pas de connaître les ordres d'infiniment petites qui sont donnés indirectement par les degrés de multiplicité de ces branches et par les nombres de leurs points d'intersection avec la tangente qui coïncident entre eux; il ne suffit pas même, que les branches soient définies par les formes des séries qui les représentent: il faut connaître aussi les coefficients de ces séries, afin de pouvoir déterminer aussi les ordres de leurs différences. De même, en appliquant le principe de correspondance, on a besoin, pour déterminer le nombre de coïncidences de points $x$ et $y$ qui ont lieu en un point $a$, de connaître, non seulement le nombre des points $y$ qui coïncident avec $a$ en même temps que $x$, et celui des points $x$ qui coïncident avec lui en même temps que $y$, mais aussi les ordres des distances infiniment petites $xy$ des points correspondants qui sont infiniment près de $a$.

Il est donc clair qu'il faut préférer à ces procédés, où il est possible, des formules où *les dénombrements ne demandent ni ces recherches particulières d'ordres d'infiniment petites,* ni un autre travail équivalent et aussi pénible. M. HALPHEN ([2]) a montré que, dans les applications de la formule contenant une extension du théorème sur la conservation du genre que j'ai donnée dans le 3^me vol. des Mathematische Annalen aux cas où il y a des solutions multiples, le dénombrement de celles-ci se fait immédiatement sans aucune recherche d'ordres d'infiniment petites. M. M. HALPHEN([3]) et SMITH ([4]) ont montré qu'il existe des relations jouissant de la même

---

([1]) J'ai donné des méthodes de ce dénombrement dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* 1867 et à la page 47 de mon Mémoire sur *les systèmes de courbes planes,* inséré aux Mémoires de l'Académie danoise des sciences, 5^me série t. X.

([2]) Bulletin de la Société Mathématique de France t. V., p. 9.

([3]) »*Sur les points singuliers des courbes algébriques planes*», publié en 1877 au tome 26 des *Mémoires présentés par divers savants;* mais l'auteur avait déjà à la présentation de ce mémoire consigné les principaux résultats dans une communication publiée dans le Compte rendu du 20 avril 1874.

([4]) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI.

propriété, et entre les nombres de points d'intersection confondus et de tangentes communes confondues de deux courbes, et entre ceux des points doubles confondus et des tangentes doubles confondues d'une seule courbe.

Je me propose d'établir ici entre ces différents théorèmes une connexion servant à montrer l'importance de la propriété commune dont je viens de parler. Je prendrai pour point de départ un théorème qui s'est présenté à M. HALPHEN dans le courant de ses recherches sur les points d'intersection et tangentes communes confondus,(1) et auquel aussi d'autres géomètres sont parvenus indépendemment de lui et très-peu après lui.(2) Je montrerai (n° 5) que, grâce à ce théorème fondamental, que je vais énoncer dans le n° 1, et dont je donnerai aussi une autre application (n$^{os}$ 3 et 4), ma démonstration originaire de l'extension du théorème sur le genre conduit immédiatement à la propriété relative aux solutions multiples que M. HALPHEN a établie autrement.

Les autres théorèmes de M. M. HALPHEN et SMITH dont je viens de parler se présenteront ensuite comme des applications de la formule contenant cette extension du théorème sur le genre (n$^{os}$ 6—8), et serviront ainsi *d'exemples* de la portée que cette formule a obtenue par la découverte de M. HALPHEN.

1. Le théorème que nous avons appelé fondamental pour les recherches actuelles peut être énoncé de la manière suivante:

»Soit donné un point singulier d'une courbe algébrique où toutes les branches ont la même tangente, et désignons par $\nu$ le degré de multiplicité ponctuelle de la courbe en ce point, c'est à dire: le nombre de points d'intersection confondus de la courbe avec une droite quelconque passant par lui, et par $\nu'$ le degré de multiplicité tangentielle, c'est à dire: le nombre de tangentes confondues qui passent par un point quelconque de la tangente donnée: alors $\nu + \nu'$ des points d'intersection de la tangente coïncident avec le point donné, et $\nu + \nu'$ des tangentes qui passent par le point coïncident avec la tangente donnée.»

On démontre sans difficulté ce théorème pour une seule branche complète en introduisant des coordonnées tangentielles dans la série qui

(1) Voir à la page 42 du Mémoire que nous venons de citer.

(2) M. M. STOLZ et NÖTHER dans les t. VIII et IX des Mathematische Annalen. Le travail du premier de ces savants est daté du 16 mai 1874.

la représente dans un système de coordonnées ponctuelles.(¹) L'extension au cas où plusieurs branches complètes sont tangentes entre elles se fait immédiatement.

2. Donnons une forme algébrique au théorème géométrique que nous venons d'énoncer.

Soit donnée une équation $f(x, y) = 0$ à deux variables $x$ et $y$, du degré $m_1$ en $x$ et du degré $m_2$ en $y$, ou, ce qui est plus commode, une équation homogène du degré $m_1$ en $x_1$ et $x_2$, et homogène du degré $m_2$ en $y_1$ et $y_2$. Si l'on détermine par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à cette équation des droites de deux faisceaux aux centres $P$ et $Q$ (et si l'on choisit les droites fixes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ ainsi que la droite $PQ$ ne corresponde pas à elle-même), l'équation, que nous écrirons toujours $f(x, y) = 0$, représentera une courbe de l'ordre $n = m_1 + m_2$ ayant un point $m_1$-tuple à $P$ et un point $m_2$-tuple à $Q$.

En égalant à zéro le discriminant $\varphi(x)$ de $f(x, y)$ par rapport à $y$, on aura l'équation en $x$ qui représente les tangentes passant par $P$, y compris les droites joignant $P$ aux autres points multiples, à l'exception de $Q$, autant de fois que la courbe $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$ — qui sera la polaire de $P$ si la droite $y_2 = 0$ coïncide avec la droite $PQ$ — a d'intersections confondues en ces points, et non compris les tangentes en $P$ à moins qu'elles n'aient plus de $m_1 + 1$ intersections confondues. Le discriminant $\psi(y)$ par rapport à $x$ représente de la même manière les tangentes passant par $Q$. Les ordres de ces deux discriminants $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ se trouvent par la première formule Pluckerienne.(²) Si $P$ et $Q$ sont les seuls points multiples de la courbe auxiliaire, celle-ci sera de la classe:

(¹) Voir aux endroits cités, ou à la page 212 du vol. X des Mathematische Annalen. M. CAYLEY s'est servi en 1866 du même procédé (On the Higher Singularities of a Plane Curve. Quart. Journ. vol. VII), mais sans énoncer directement le théorème dont nous parlons ici.

(²) Remarquons, du reste, que, dans ce qui suit, on se sert seulement de la *différence* des ordres des discriminants, qu'on obtient, sans aucune application des équations Pluckeriennes, en égalant les nombres totals des tangentes à la courbe $f = 0$ qui passent par $P$ et $Q$. La même observation a permis une simplification de la démonstration de M. BERTINI du théorème sur la conservation du genre (Comptes rendus t. LXX p. 742), que je rappelle parce qu'elle me semble montrer qu'il ne soit pas — comme dit M.

$$n' = (m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1) - m_1(m_1 - 1) - m_2(m_2 - 1) = 2m_1m_2.$$

Supposant encore qu'aucune droite par $P$ ne rencontre la courbe en plus de $m_1 + 1$ points coïncidant avec $P$, on aura $2m_1(m_2 - 1)$ tangentes qui passent par $P$ sans avoir $P$ pour point de contact. Ce nombre est donc l'ordre du discriminant $\varphi(x)$, et il ne cesse pas de l'être dans les cas où les suppositions faites ici ne sont pas en vigueur. De même, le discriminant $\psi(y)$ est de l'ordre $2m_2(m_1 - 1)$.

Considérons maintenant un point singulier ou simple $M$ de la courbe. Si aucune tangente en $M$ ne passe ni par $P$ ni par $Q$, ce point correspond à des facteurs de la même multiplicité (zéro, si le point est simple) de tous les deux discriminants; mais si $MP$ a $\nu_2$ points d'intersection coïncidant avec $M$, et si $MQ$ en a $\nu_1$, et si l'on désigne par $\xi$ le degré de multiplicité du facteur $(a_2x_1 - a_1x_2)$ du discriminant $\varphi(x)$ qui détermine $PM$, et par $\eta$ le degré de multiplicité du facteur $(b_2y_1 - b_1y_2)$ du discriminant $\psi(y)$ qui détermine $QM$, il résulte du n° 1 que l'on a:

(1) $$\xi - \eta = \nu_2 - \nu_1,$$

les deux membres de cette équation indiquant de combien le degré de multiplicité tangentielle de $MP$ dépasse celui de $MQ$.

En appliquant la formule (1) à tous les points de la courbe, et en substituant à $\sum\xi$ et $\sum\eta$ les expressions $2m_1(m_2 - 1)$ et $2m_2(m_1 - 1)$ des ordres des discriminants, on trouve

(2) $$2(m_2 - m_1) = \sum(\nu_2 - \nu_1),$$

où il suffit évidemment d'étendre la sommation aux points de la courbe qui donnent des valeurs différentes entre elles de $\nu_1$ et $\nu_2$.

---

SCHUBERT dans les Mathematische Annalen t. XVI p. 180 — une »*berechtigte Forderung*» à la simplicité géométrique de la démonstration de ce théorème qu'elle repose seulement sur le principe de correspondance. On verra du présent article que je ne regarde pas même, dans ce cas, l'usage de ce principe comme avantageux s'il y a des singularités supérieures, ni non plus pour l'extension du théorème. Je saisis l'occasion pour faire observer que la faute, montrée par M. SCHUBERT, d'une démonstration qui porte mon nom dans le livre de Clebsch-Lindemann (p. 681) n'appartient pas à moi, ce que montre aussi la note de M. Lindemann en bas de la page citée.

Pour donner un sens purement algébrique aux formules (1) et (2) nous avons seulement à remarquer encore que $\nu_1$ (*ou* $\nu_2$) *est le degré de multiplicité du facteur* $a_2x_1 - a_1x_2$ (*ou* $b_2y_1 - b_1y_2$) *qu'obtient* $f(x, y)$ *pour* $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}\left(ou\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}\right)$.

3. Appliquons premièrement la formule (1) au cas où $m_1 = m_2 = 2$, c'est à dire à une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables. Alors les deux discriminants seront des formes binaires quartiques.

Supposons maintenant que le discriminant $\varphi(x)$ contient le facteur quadratique $(a_2x_1 - a_1x_2)^2$. En égalant ce facteur à zéro, on rendra la forme donnée égale à un carré $(b_2y_1 - b_1y_2)^2$.

Aux valeurs $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$ et $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}$ correspond ici, dans la formule (1), $\xi = 2$, $\nu_2 = 2$, et on a évidemment $\nu_1 \geqq 1$. Il en résulte que $\eta \gtreqless 1$, mais alors il faut que pour $b_2y_1 - b_1y_2 = 0$ la forme donnée ait le facteur $(a_2x_1 - a_1x_2)^2$, ou bien que $\nu_1 = 2$, $\eta = 2$.

*Les deux discriminants auront donc en même temps deux facteurs égaux* ou bien, leurs discriminants doivent s'évanouir en même temps. Ces discriminants de $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, qui sont des fonctions rationnelles des coefficients de la forme donnée, sont donc égaux, à un facteur numérique près, qui doit être, à cause de la symétrie, égal à $\pm 1$; en choisissant un simple exemple([1]) on voit qu'il a la valeur de $+1$. La forme donnée représente, dans le cas où le discriminant commun aux deux discriminants $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ est égal à zéro, une courbe à un *nouveau* point double (à côté de $P$ et $Q$).

*Note.* Il en sera autrement dans les cas où $m_1$ ou $m_2$ est $> 2$. Si $m_2 > 2$ il devient possible que $\nu_2 = 3$, et si $m_2 > 3$ il sera possible qu'en égalant à zéro deux facteurs égaux entre eux du discriminant $\varphi(x)$ on réduise la forme donnée à contenir deux couples de facteurs égaux entre eux. En faisant usage de faits connus de la théorie des systèmes de courbes,([2]) on trouve que les discriminants des deux discriminants $\varphi(x)$

---

([1]) Si la forme est $(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)y_1y_2 + (b_1y_1^2 + b_2y_2^2)x_1x_2$ le discriminant des deux discriminants sera, à un constant numérique près, égal à $a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2(a_1a_2 - b_1b_2)^2$ — ce qu'on peut voir sans le calculer.

([2]) Voir mon article sur les systèmes de courbes planes dans le vol. X des Mémoires de l'Académie Danoise des Sciences (5me série).

et $\psi(y)$ ont en général *un facteur simple commun* correspondant aux cas où la courbe représentée par la forme donnée a un point double, et que chacun d'eux contient encore *deux fois* un facteur correspondant aux cas où une tangente double, et *trois fois* un facteur correspondant aux cas où une tangente stationnaire, passe par $P$ ou $Q$.

4. Nous déduirons des conséquences ultérieures du fait que nous venons de trouver, que les deux discriminants d'une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables ont le même discriminant. Désignons les invariants des deux discriminants du quatrième ordre $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ par $i_1$, $j_1$; $i_2$, $j_2$, les lettres ayant les mêmes significations que dans les Leçons de Clebsch-Lindemann. Alors on a identiquement

$$i_1^3 - 6j_1^2 = i_2^3 - 6j_2^2,$$

ou bien

$$(i_1 - i_2)(i_1^2 + i_1 i_2 + i_2^2) = 6(j_1 - j_2)(j_1 + j_2),$$

où $i_1$ et $i_2$ sont des fonctions rationnelles du quatrième degré, $j_1$ et $j_2$ des fonctions rationnelles du sixième degré, des coefficients de la forme donnée $f(x, y)$; car les coefficients de ses deux discriminants sont du second degré. Le second facteur du premier membre ne peut être décomposé en des facteurs rationnels, à moins que ceux-ci ne soient aussi des facteurs de $i_1$ et $i_2$, et par conséquent aussi de $i_1 - i_2$. Il s'ensuit, que chacun des deux facteurs du sixième degré du second membre soit aussi facteur de $i_1 - i_2$, qui n'est que du quatrième degré. $i_1 - i_2$ est donc égal à zéro, et par conséquent aussi $j_1 - j_2$ ou $j_1 + j_2$. On a donc identiquement $i_1 = i_2$, $j_1 = \pm j_2$. Un exemple[1] montre qu'il faut prendre le premier signe.

Nous avons donc démontré que *les deux discriminants d'une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables ont les mêmes invariants.*

Nous avons énuméré ailleurs[2] les principales applications géomé-

---

[1] Dans l'exemple de la première note au n° 3 on aura

$$j_1 = j_2 = \frac{8}{9}(a_1 a_2 + b_1 b_2)(a_1 a_2 - 2b_1 b_2)(2a_1 a_2 - b_1 b_2)$$

[2] Proceedings of the London Mathematical Society vol. X p. 196.

triques de ce théorème, qui se présente déjà dans la transformation d'Euler de la première intégrale elliptique.

5. Revenons au cas général. La formule (2) du n° 2 s'applique immédiatement à la correspondance de deux courbes unicursales dont les points correspondants sont déterminés par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à $f(x, y) = 0$.

A un point $x$ de l'une correspondent $m_2$ points $y$ de l'autre, et à un point $y$ correspondent $m_1$ points $x$. Pour une couple de points correspondants $a$ et $b$, $\nu_1$ désigne le nombre des points $x$ qui coïncident avec $a$ lorsque $y$ coïncide avec $b$, et $\nu_2$ le nombre des points $y$ qui coïncident avec $b$, lorsque $x$ coïncide avec $a$.

La généralisation de la même formule qui la rend applicable à la correspondance des points de deux courbes quelconques se fait par une application très-simple de la formule trouvée elle-même. Soit donnée une relation entre les points $x$ et $y$ de deux courbes algébriques des ordres $n_1$ et $n_2$, des classes $n'_1$ et $n'_2$ etc., telle qu'à un point $x$ correspondent $\mu_2$ points $y$, et à un point $y$, $\mu_1$ points $x$. Joignons le point mobile $x$ de la première courbe à un point fixe $P$, et les points correspondants $y$ à un point fixe $Q$: alors il existe entre les faisceaux $Px$ et $Qy$ une relation — représentée de la manière indiquée dans le n° 2 par le lieu des points d'intersection des droites $Px$ et $Qy$ — telle qu'à toute droite $Px$ correspondent $m_2 = n_1 . \mu_2$ droites $Qy$, et à toute droite $Qy$ correspondent $m_1 = n_2 . \mu_1$ droites $Px$. Cherchons, pour faire usage de la formule (2), les droites $Px$, telles que deux ou plusieurs des droites correspondantes $Qy$ coïncident entre elles, et les droites $Qy$, telles que deux ou plusieurs des droites correspondantes $Px$ coïncident entre elles.

Des droites $Qy$ correspondant à une droite $Px$ peuvent coïncider des trois manières suivantes:

1° La droite $Px$ rencontre la première courbe en des points $x', x'' \ldots . x^{(r)}$ correspondant *respectivement* à des points $y', y'' \ldots . y^{(r)}$ d'une droite passant par $Q$. Alors on aura entre cette droite et $Px$ une correspondance représentée, dans le second membre de l'équation (2), par les nombres $\nu_1 = \nu_2 = r$, de façon que cette correspondance n'y ait aucune influence.

2° La droite $Px$ rencontre la première courbe en plusieurs points $x$ coïncidant avec un point $O$. Alors il n'est pas nécessaire que les groupes

des $\mu_2$ points correspondants coïncident entre eux; mais cette coïncidence a lieu toujours si les points $x$ appartiennent à la même branche complète. En effet, les coordonnées des points voisins de $O$ sur cette branche s'expriment par une variable $t$ au moyen de séries à puissances entières et croissantes, le point $O$ correspondant à la valeur $t = 0$; car telle est la définition d'une branche complète. Le groupe des $\mu_2$ points $y$ qui correspondent à un point mobile $x$ de la branche, dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point $x$, par conséquent aussi de la variable $t$. Il ne correspond donc aussi qu'un seul groupe à $t = 0$, et à deux points coïncidant avec $O$ deux groupes coïncidant entre eux. Il est évident de plus qu'en même temps que $x$ parcourt la première courbe d'une manière continue, les $\mu_2$ points $y$ qui y correspondent se mouvront d'une manière continue sur l'autre courbe. Aucun d'eux ne peut passer d'une branche complète d'un point singulier à une autre; car on peut faire correspondre d'une manière uniforme à la seconde courbe une nouvelle courbe où les différentes branches complètes sont remplacées par des points distincts, et par conséquent un passage d'une branche à une autre par un mouvement discontinu. Il s'ensuit qu'on peut regarder, dans la recherche actuelle, les points de l'une ou l'autre des deux courbes qui coïncident *sans* appartenir à la même branche complète comme des points distincts.

3° La droite $Px$ passe par un point $x$ auquel correspond un groupe de points $y$ dont plusieurs coïncident entre eux.

Nous voyons ainsi que, pour avoir tous les termes différents de zéro du second membre de l'équation (2), il suffit de considérer la correspondance d'une droite par $P$ rencontrant une seule branche de la première courbe en $\rho_1$ points $x$ coïncidant avec un point fixe $a$, et d'une droite par $Q$ rencontrant une seule branche de la seconde courbe en $\rho_2$ points $y$ coïncidant avec un point fixe $b$, et de supposer que $\nu_2$ des $\mu_2$ points $y$ qui correspondent à $a$ coïncident avec $b$, et $\nu_1$ des $\mu_1$ points $x$ qui correspondent à $b$ coïncident avec $a$. Alors on obtient

$$2(n_1\mu_2 - n_2\mu_1) = \sum (\rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1), \tag{3}$$

où la somme $\sum$ est étendue à toutes les couples de points correspondants des deux courbes qui donnent des termes différents de zéro — et à autant d'autres qu'on veut. Afin d'y distinguer l'influence des singularités

des courbes de celle de la nature de la correspondance, nous ferons usage de la transcription suivante

$$(4) \qquad \rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1 = (\rho_1 - 1)\nu_2 - (\rho_2 - 1)\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1).$$

Pour le premier terme $(\rho_1 - 1)\nu_2$ il suffit d'étendre la sommation à tous les points $a$ de la première courbe où une seule branche est rencontrée par une droite passant par $P$ en plus d'un point $(\rho_1 > 1)$, et à tous les points de la seconde courbe qui y correspondent. Or la somme des valeurs des multiplicités $\nu_2$ des points $b$ correspondant à chacun de ces points $a$ est égale à $\mu_2$. On obtient ainsi, dans la formule (3), le terme

$$\mu_2 \cdot \sum\nolimits_1 (\rho_1 - 1),$$

la sommation $\sum_1$ étant étendue ici, et dans ce qui suit, à tous les points de la courbe $(x)$ qui donnent des termes différents de zéro.

On obtient de la même manière le terme

$$-\mu_1 \cdot \sum\nolimits_2 (\rho_2 - 1),$$

la sommation $\sum_2$ étant étendue à tous les points de la courbe $(y)$ qui donnent des termes différents de zéro.

Il restera encore le terme

$$\sum (\nu_2 - \nu_1)$$

où la sommation — exactement comme dans le cas de deux courbes unicursales — peut être étendue à tous les cas où deux ou plusieurs points correspondant à un seul point coïncident entre eux.

On parvient ainsi à la formule suivante

$$(5) \qquad \sum (\nu_2 - \nu_1) = \mu_1 \left[\sum\nolimits_2 (\rho_2 - 1) - 2n_2\right] - \mu_2 \left[\sum\nolimits_1 (\rho_1 - 1) - 2n_1\right],$$

où le facteur de $\mu_1$ (ou $\mu_2$) dépend seulement de la courbe $(y)$ (ou $(x)$).

Le point $P$ pouvant être un point quelconque du plan, on peut supposer qu'il ne se trouve ni sur une tangente singulière ni sur la tangente en un point singulier de la courbe $(x)$. $\sum_1 (\rho_1 - 1)$ est donc la somme de la classe $n'_1$ de la courbe $(x)$ et de $\sum_1 (\sigma_1 - 1)$ où $\sigma_1$ est le degré de multiplicité d'une branche complète quelconque de la courbe $(x)$.

On pose

$$n'_1 + \sum_1 (\sigma_1 - 1) - 2n_1 = 2(p_1 - 1),$$

où $p_1$ est appelé le *genre* de la courbe $(x)$. En faisant de même pour la courbe $(y)$, on aura la formule

$$\sum(\nu_2 - \nu_1) = 2\mu_1(p_2 - 1) - 2\mu_2(p_1 - 1). \tag{6}$$

Dans le cas où toutes les valeurs de $\nu_1$ et $\nu_2$ restent $< 3$ on peut substituer au premier membre de cette équation la différence du nombre des cas où deux points $y$ correspondant à un seul point $x$ coïncident entre eux, et de celui où deux points $x$ correspondant à un seul point $y$ coïncident, et on obtiendrait ainsi mon extension originaire du théorème sur la conservation du genre. La formule qu'on trouve alors est encore applicable au cas général si l'on regarde comme solutions multiples les couples de points correspondants où $\nu_1$ ou $\nu_2$ est $> 2$; mais il est évidemment le plus simple d'employer alors immédiatement la formule (6), qui est due à M. Halphen.

6. A cause de la circonstance que l'application de la formule (6) ne demande aucune détermination de coefficients inconnus dépendant des ordres de quantités infiniment petites, elle est à préférer — quand il est possible d'en faire usage — aux applications du principe de correspondance. Nous donnerons quelques exemples servant à montrer cet avantage.

On sait que deux courbes des ordres $n_1$ et $n_2$ se rencontrent en $n_1 . n_2$ points. La détermination de ces points dépendant d'une élimination, et le nombre de ceux qui coïncident avec un point de contact de branches des deux courbes dépendant des ordres de distances infiniment petites, il ne sera pas possible de déterminer ce dernier nombre par la formule (6). De même il sera impossible de déterminer immédiatement par la formule (6) le nombre des tangentes communes à deux courbes qui

coïncident entre elles. Mais après avoir déterminé l'un de ces nombres, il sera possible d'en déduire l'autre par la formule (6), appliquée à la recherche d'une expression de la différence $n'_1 n'_2 - n_1 n_2$ des nombres des tangentes communes et des points d'intersection des deux courbes.

Etablissons, à cet effet, la correspondance suivante: la tangente à la première courbe $(x)$ en un point $x$ passe par les points correspondants $y$ de l'autre. Alors on a, en faisant usage des notations du n° 5,

$$\mu_1 = n'_1, \qquad \mu_2 = n_2. \tag{7}$$

En substituant, dans la formule (6), ces valeurs, ainsi que

$$2(p_1 - 1) = n_1 + \sum\nolimits_1 (\sigma'_1 - 1) - 2n'_1,$$

où $\sigma'_1$ est le degré de multiplicité tangentielle d'une branche complète quelconque de la courbe $(x)$, et qui résulte de l'expression déjà donnée du genre, si l'on observe que deux courbes qui sont des polaires réciproques doivent être du même genre, et

$$2(p_2 - 1) = n'_2 + \sum\nolimits_2 (\sigma_2 - 1) - 2n_2,$$

on la réduira à

$$n'_1 n'_2 - n_1 n_2 = \sum (\nu_2 - \nu_1) - n'_1 \sum\nolimits_2 (\sigma_2 - 1) + n_2 \sum\nolimits_1 (\sigma'_1 - 1). \tag{8}$$

Pour trouver les termes de la somme $\sum(\nu_2 - \nu_1)$ qui sont différents de zéro, il faut distinguer les quatres espèces suivantes pour la correspondance de $x$ et $y$:

1° Ni le point $x$ ne coïncide avec $y$, ni la tangente en $x$ avec la tangente en $y$: alors on a

$$\nu_1 = \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2.$$

2° Le point $x$ coïncide avec $y$; les tangentes aux branches auxquelles appartiennent ces points sont différentes entre elles: alors on a (n° 1)

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2.$$

3° La tangente à la branche à laquelle appartient $x$ coïncide avec la tangente à la branche à laquelle appartient $y$; mais ces deux points de contact sont distincts entre eux; alors on a

$$\nu_1 = \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

4° Les branches auxquelles appartiennent $x$ et $y$ sont tangentes entre elles, $x$ et $y$ coïncidant avec le point de contact; alors on a

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

Pour trouver une expression plus simple du second membre de l'équation (8), il est le plus commode de réunir, pour toute couple de points correspondants $x$ et $y$ où, du moins, une des différences $\nu_2 - \nu_1$, $\sigma_2 - 1$ ou $\sigma'_1 - 1$ est différente de zéro, la valeur de $\nu_2 - \nu_1$ aux termes correspondants de $-n'_1\sum_2(\sigma_2 - 1) + n_2\sum_1(\sigma'_1 - 1)$, c'est à dire à la valeur de $(\sigma_2 - 1)$ qui appartient à $y$ multipliée par le nombre pour lequel compte la tangente en $x$ dans celui des $n'_1$ tangentes à la courbe $(x)$ qui passent par $y$ — et prise au signe *moins* — et à la valeur de $(\sigma'_1 - 1)$ qui appartient à $x$ multipliée par le nombre pour lequel compte $y$ dans celui des $n_2$ intersections de la tangente en $x$ avec la courbe $y$.[1]

En appliquant successivement ce procédé aux quatre espèces de correspondance on trouve (en donnant aux cas respectifs les mêmes n$^{os}$ que tout à l'heure)

1° $\sigma_2 - \sigma'_1 - \sigma'_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_2(\sigma'_1 - 1) = 0$

2° $\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma'_1 - (\sigma_1 + \sigma'_1)(\sigma_2 - 1) + \sigma_2(\sigma'_1 - 1) = -\sigma_1\sigma_2$

3° $\sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma'_1 - \sigma'_1(\sigma_2 - 1) + (\sigma_2 + \sigma'_2)(\sigma'_1 - 1) = \sigma'_1\sigma'_2$

4° $\sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma_1 - \sigma'_1 - (\sigma_1 + \sigma'_1)(\sigma_2 - 1) + (\sigma_2 + \sigma'_2)(\sigma'_1 - 1) = \sigma'_1\sigma'_2 - \sigma_1\sigma_2$

La sommation des termes de la seconde espèce devant être étendue à tous les points d'intersection de branches complètes des deux courbes qui ne sont pas des points de contact, celle des termes de la troisième espèce à toutes les tangentes communes qui ont des points de contact distincts, et celle de la quatrième espèce à tous les points de contact, la somme totale sera égale à $S'(\sigma'_1\sigma'_2) - S(\sigma_1\sigma_2)$, où la somme $S$ est

---

(1) Dans les cas où la position des courbes n'a rien de particulier, on trouve seulement que la différence des nombres des tangentes communes et des points d'intersection est égale à $n'_1 n'_2 - n_1 n_2$. Il suffirait de considérer ici, à côté de ce cas général, celui où deux branches complètes sont tangentes entre elles. Voulant montrer avant tout la méthode, nous ne nous y sommes pas bornés.

étendue à tous les cas où des branches complètes ont un point commun, $S'$ à tous ceux où elles ont une tangente commune. En commençant par n'exécuter la première de ces sommations que pour les branches passant par un seul point, on aura pour somme $\alpha_1\alpha_2$, *où* $\alpha_1$ *et* $\alpha_2$ *sont les multiplicités totales de ce point appartenant aux deux courbes,* de façon que $S(\sigma_1\sigma_2) = \mathbf{s}(\alpha_1\alpha_2)$, où aussi la somme $\mathbf{s}$ est étendue à tous les points communs aux deux courbes. On obtient de même $S'(\sigma_1'\sigma'_2) = \mathbf{s}'(\alpha'_1\alpha'_2)$ *où* $\alpha'_1$ *et* $\alpha'_2$ *sont les degrés totals de multiplicité d'une tangente commune aux deux courbes,* et où la somme $\mathbf{s}'$ s'étend à toutes ces tangentes. On trouve ainsi

$$n'_1n'_2 - n_1n_2 = \mathbf{s}'(\alpha'_1\alpha'_2) - \mathbf{s}(\alpha_1\alpha_2). \tag{9}$$

Le seul résultat contenu à cette formule qui ne soit pas évident immédiatement, celui que la différence du nombre des tangentes communes à deux courbes qui coïncident avec la tangente à deux branches complètes tangentes entre elles, et du nombre des points d'intersection coïncidant avec leur point de contact, est égale à $\sigma'_1\sigma'_2 - \sigma_1\sigma_2$, est dû à M. Halphen (¹) dont la démonstration — de même que celle de M. Smith (²) — diffère entièrement de celle que nous venons d'en donner.

7. Pour déduire les *formules de Plücker* on se sert ordinairement, soit d'intersections de la courbe donnée avec ses courbes polaires et avec sa courbe Hessienne, soit du principe de correspondance. Pour déterminer, par cette déduction, l'influence de singularités supérieures on a besoin de connaître les ordres des divergences infiniment petites des branches totales et partielles entre elles. Aussi l'abaissement de la classe, ou de l'ordre, dû à un point singulier, ou à une tangente singulière, dépend-il nécessairement de ces ordres d'infiniment petites; mais indépendemment de ceux-ci il existe une relation entre les deux abaissements, ce qui se montrera par la circonstance qu'il suffit d'appliquer les procédés dont nous venons de parler à la déduction d'une *seule* des formules Plückériennes — par exemple de celle qui indique la classe d'une courbe d'ordre

---

(¹) Points singuliers des courbes algébriques planes. (Mémoires prés. par divers Savants XXVI, 2). Le théorème ressort de la combinaison de l'Art. I Théor. II Cor., et de l'Art. IV Théor. V.

(²) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI p. 167.

donné — pendant que les autres peuvent être démontrées par une application de la formule (6) ou du théorème sur le genre. L'influence des singularités supérieures sur ces dernières formules se présentera alors d'elle-même, sans aucune étude particulière des ordres d'infiniment petits.

Premièrement on a, en faisant usage de l'expression du genre et de l'identité des genres de la courbe donnée et de sa polaire réciproque, les équations déjà mentionnées

$$(10) \qquad 2(p-1) = n' + \sum(\sigma - 1) - 2n = n + \sum(\sigma' - 1) - 2n',$$

les notations étant les mêmes que dans le n° 5, et les sommations étant étendues à tous les termes différents de zéro, et, évidemment, à autant de termes égaux à zéro qu'on veut. Il est donc permis d'étendre toutes les deux sommations aux mêmes points de la courbe. On déduit ainsi de (10)

$$(11) \qquad 3(n' - n) = \sum(\sigma' - \sigma),$$

où la sommation s'étend encore à tous les termes différents de zéro.

On obtient une autre formule par l'application à une seule courbe d'une correspondance, semblable à celle du n° 6. On fait correspondre à chaque point $x$ de la courbe les $n-2$ points $y$ où la tangente en $x$ rencontre encore la courbe. Pour appliquer la formule (6) à cette correspondance il faut substituer

$$\mu_1 = n' - 2, \qquad \mu_2 = n - 2,$$

et il sera le plus commode de substituer à $2(p_1 - 1)$ la seconde, et à $2(p_2 - 1)$ la première des expressions (10). On trouve alors

$$(12) \quad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = \sum(\nu_2 - \nu_1) - (n' - 2)\sum(\sigma - 1) + (n-2)\sum(\sigma' - 1),$$

où toutes les sommes sont étendues à tous les termes différents de zéro.

En abordant la détermination de $\sum(\nu_2 - \nu_1)$, on rencontre premièrement les mêmes quatre correspondances de points de branches complètes distinctes que dans le cas où $x$ et $y$ appartiennent à des courbes différentes, et chacune de ces correspondances sera représentée, dans tout le second membre de l'équation (12), par exactement les mêmes termes que

dans le second membre de l'équation (8). En observant encore que chaque combinaison de deux branches qui ont un point commun ou une tangente commune se présente ici deux fois, parce que l'une ou l'autre des deux branches peut contenir le point $x$ de la correspondance, on voit que la somme de ces termes sera égale à $2(S'(\sigma'_1\sigma'_2) - S(\sigma_1\sigma_2))$, où les sommes $S$ et $S'$ s'étendent à toutes les combinaisons de l'une ou l'autre de ces deux espèces.

A côté de ces correspondances de points $x$ et $y$ de branches différentes entre elles on a à considérer, dans le cas actuel, celles où les points correspondants $x$ et $y$ coïncident entre elles sur une seule branche. Alors on a

$$\nu_1 = \nu_2 = \sigma + \sigma' - 2.$$

$\nu_2 - \nu_1$ devient donc égal à zéro, de façon que ces correspondances ne seront représentées, dans le second membre de (12), que par les termes contenus dans

$$-(n'-2)\sum(\sigma - 1) + (n-2)\sum(\sigma' - 1),$$

qui ont la valeur de

$$-(\sigma + \sigma' - 2)(\sigma - 1) + (\sigma + \sigma' - 2)(\sigma' - 1) = (\sigma + \sigma' - 2)(\sigma' - \sigma).$$

La formule (12) se réduit donc à

$$(13) \quad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = 2S'(\sigma'_1, \sigma'_2) - 2S(\sigma_1 \sigma_2) + \sum(\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma),$$

où la dernière sommation s'étend à tous les points de la courbe qui donnent des termes différents de zéro.

8. Il est possible de déduire des équations (11) et (13) une nouvelle relation qui ne dépend plus des multiplicités des différentes branches, mais, de même que la formule (9), seulement des multiplicités totales des points et tangentes singuliers. En ajoutant, à cet effet, l'équation (11) à l'équation (13), où il est permis d'étendre la sommation $\sum$ aux mêmes termes, on trouve

$$(14) \quad n'^2 - 3n' - n^2 + 3n = 2S'(\sigma'_1 \sigma'_2) - 2S(\sigma_1 \sigma_2) + \sum(\sigma'^2 - \sigma' - \sigma^2 + \sigma).$$

Réunissons ici les termes du second membre qui sont formés des degrés de multiplicité $\sigma$ des branches d'un seul point $\alpha$-tuple. On trouve

$$-\sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2-\ldots-\sigma_\gamma{}^2-2\sigma_1\sigma_2-\ldots-2\sigma_{\gamma-1}\sigma_\gamma+\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\gamma=-\alpha^2+\alpha.$$

En faisant de même pour tous les points où passe une ou plusieurs branches représentées dans le second membre de (14), et en réunissant d'une manière semblable les termes appartenant aux différents contacts de toute tangente singulière, on trouve

$$n'^2-3n'-n^2+3n=\sum(\alpha'^2-\alpha')-\sum(\alpha^2-\alpha), \tag{15}$$

où $\alpha$ et $\alpha'$ sont les degrés de multiplicité totale de tous les points singuliers et tangentes singulières. (¹)

Si la courbe n'a que des singularités ordinaires, les formules trouvées (10), (11), (13) et (15), dont trois sont indépendentes entre elles, se réduisent à un système de deux relations PLÜCKÉRIENNES augmenté d'une formule servant à exprimer le genre $p$ par les nombres PLÜCKÉRIENS. On a en effet, dans ce cas, en désignant par $d$ et $e$ les nombres des points doubles et cuspidaux, et par $d'$ et $e'$ les nombres des tangentes doubles et tangentes d'inflexion:

$$\sum(\sigma-1)=e,\quad \sum(\sigma'-1)=e',\quad \sum(\sigma'-\sigma)=e'-e$$

$$S'(\sigma'_1\sigma'_2)=d',\quad S(\sigma_1\sigma_2)=d,\quad \sum(\sigma'^2-2\sigma'-\sigma^2+2\sigma)=e'-e$$

$$\sum(\alpha'^2-\alpha')=2d'+2e',\quad \sum(\alpha^2-\alpha)=2d+2e.$$

On sait qu'il est possible d'appliquer les formules PLÜCKÉRIENNES aussi aux cas, où la courbe a des singularités supérieures, en représentant chacune de celles-ci par les équivalents PLÜCKÉRIENS introduits par M. CAYLEY, (²) que nous désignerons par $\delta$, $\varepsilon$, $\delta'$, $\varepsilon'$. Les conditions imposées à ces équivalents par les formules qui nous occupent — auxquelles il

(¹) La substitution de l'équation (14) à (13) permettait d'éviter d'introduire un nombre infini de termes par la séparation des termes qui contiennent $\sigma$ de ceux qui contiennent $\sigma'$. — Notre formule (15) se distingue d'une formule tout-à-fait semblable de M. NÖTHER par les significations des lettres: ses $k$ ne désignent pas comme nos $\alpha$ les *multiplicités immédiates* des points singuliers, mais celles des points multiples qui en résultent par une décomposition; et la même différence a lieu entre les significations de ses $k^{(1)}$ et de nos $\alpha'$.

(²) On the Higher Singularities of a Plane Curve. Quarterly Journal of Mathematics, vol. VII.

faut ajouter celle que leur impose la première formule PLÜCKÉRIENNE — se présentent d'elles-mêmes. Les formules (10) donnent pour représenter une singularité supérieure [1]

(16) $$\varepsilon = \sum(\sigma - 1), \qquad \varepsilon' = \sum(\sigma' - 1),$$

et la différence $\delta' - \delta$ peut être déterminée par l'une ou l'autre des équations

(17) $$2(\delta' - \delta) + (\varepsilon' - \varepsilon) = 2S'(\sigma'_1\sigma'_2) - 2S(\sigma_1\sigma_2) + \sum(\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma)$$

ou

(18) $$2(\delta' + \varepsilon' - \delta - \varepsilon) = \sum(a'^2 - a') - \sum(a^2 - a),$$

qu'on obtient de (13) et (15), les sommes étant étendues à toutes les branches et combinaisons appartenant à la singularité.

Cherchons par exemple la représentation de la singularité formée par $\gamma$ branches complètes tangentes entre elles.

Ayant alors

$$a = \sum(\sigma), \qquad a' = \sum{}'(\sigma'),$$

on trouve (16) et (18)

$$\varepsilon = a - \gamma, \qquad \varepsilon' = a' - \gamma$$

$$2(\delta' + \varepsilon' - \delta - \varepsilon) = (a' - a)(a' + a - 1),$$

d'où

(19) $$2(\delta' - \delta) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon + 2\gamma - 3).$$

Dans le cas où $\gamma = 1$, c'est à dire pour une seule branche complète, on trouve

(20) $$2(\delta' - \delta) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon - 1).$$

Cette relation est due à M. SMITH; [2] il n'est pas difficile d'en revenir à l'équation (19), si l'on applique en même temps l'équation (9) aux combinaisons des branches.

---

[1] Il peut être commode de se servir des équivalents, remplaçant les singularités seulement dans les équations PLÜCKÉRIENNES propres, et non pas dans celle qui exprime le genre. Alors il faut remplacer (16) par

$$\varepsilon' - \varepsilon = \sum(\sigma' - \sigma).$$

[2] Proceedings of the London Mathematical Society VI p. 166.

# SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE.

**Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite**

PAR

E. GOURSAT

à TOULOUSE.

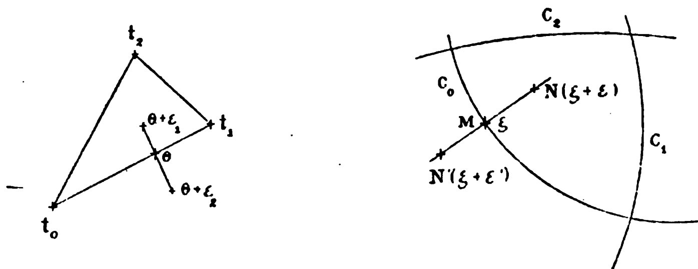
Le théorème sur les intégrales définies affectées de coupures que vous avez démontré dans votre lettre à M. Mittag-Leffler, publiée par le journal de Borchardt, et dans votre cours à la Sorbonne, peut se démontrer facilement par la considération des intégrales curvilignes et l'application du théorème de CAUCHY. Voici en quelques mots la démonstration.

Soient $F(t, z)$, $G(t, z)$ deux fonctions holomorphes des deux variables indéfinies $t$ et $z$, et $t_0$, $t_1$ deux valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. Considérons l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt$, prise suivant le chemin rectiligne qui joint le point $t_0$ au point $t_1$. Cette intégrale a une valeur unique et finie pour tous les points du plan, que je désignerai par $\Phi(z)$, à l'exception de ceux qu'on détermine par la condition $G(t, z) = 0$, en donnant à $t$ les valeurs comprises dans la formule

$$t_0 + \lambda(t_1 - t_0)$$

où $\lambda$ prend toutes les valeurs réelles de 0 à 1. On détermine ainsi un nombre fini ou infini de portions de courbes ou de courbes complètes pour lesquelles la fonction $\Phi(z)$ cesse d'avoir un sens.

Soit $C_0$ l'une de ces courbes, et un point $M$ sur cette courbe d'affixe $\zeta$, auquel correspond sur le chemin rectiligne $t_0 t_1$ un point $\theta$. Sur la normale en $M$ à la courbe $C_0$ et de part et d'autre de ce point prenons deux points $N$ et $N'$, à des distances infiniment petites de ce point; nous désignerons les affixes par $\zeta + \varepsilon$, et $\zeta + \varepsilon'$. L'équation $G(t, z) = 0$ fait correspondre aux valeurs $\zeta + \varepsilon$, $\zeta + \varepsilon'$ deux valeurs $\theta + \varepsilon_1$, $\theta + \varepsilon_2$, voisines de $\theta$ et figurées par des points situés de part




et d'autre du chemin rectiligne $t_0 t_1$. Supposons, par exemple, qu'à la valeur $\zeta + \varepsilon$ corresponde pour $t$ la valeur $\theta + \varepsilon_1$, et admettons en outre qu'à la valeur $\zeta$ l'équation $G(t, z) = 0$ ne fasse correspondre qu'une valeur $\theta$ sur le chemin rectiligne $t_0 t_1$. On pourra alors trouver un point $t_2$ tel qu'à l'intérieur du triangle $t_0 t_1 t_2$ l'équation $G(t, \zeta + \varepsilon) = 0$ n'ait d'autre racine que la racine $\theta + \varepsilon_1$. La fonction $\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$ n'aura alors à l'intérieur de ce triangle qu'un seul point critique, le point $\theta + \varepsilon_1$, et l'application du théorème de Cauchy nous donne immédiatement

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{t_2}^{t_0} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt = 2i\pi A$$

$A$ désignant le résidu de la fonction $\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$ relative au pôle $\theta + \varepsilon_1$:

$$A = R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon).$$

Chacune des intégrales $\int_{t_1}^{t_2}$, $\int_{t_2}^{t_0}$ est supposée prise comme la première suivant le chemin rectiligne. A chacune de ces intégrales est affecté un système de coupure différent, et différent du premier. Posons

$$\Phi_1(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt,$$

$$\Phi_2(z) = \int_{t_2}^{t_0} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt;$$

l'égalite précédente pourra s'écrire

$$(1) \qquad \Phi(\zeta + \varepsilon) + \Phi_1(\zeta + \varepsilon) + \Phi_2(\zeta + \varepsilon) = 2i\pi R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon)$$

Donnons maintenant à $z$ la valeur $\zeta + \varepsilon'$; la fonction sous le signe d'intégration sera holomorphe à l'intérieur du triangle $t_0 t_1 t_2$, et le théorème de Cauchy nous donnera

$$(2) \qquad \Phi(\zeta + \varepsilon') + \Phi_1(\zeta + \varepsilon') + \Phi_2(\zeta + \varepsilon') = 0.$$

Retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient:

$$\Phi(\zeta + \varepsilon) - \Phi(\zeta + \varepsilon') = [\Phi_1(\zeta + \varepsilon') - \Phi_1(\zeta + \varepsilon)] + [\Phi_2(\zeta + \varepsilon') - \Phi_2(\zeta + \varepsilon)] + 2i\pi R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon)$$

Si maintenant on fait tendre $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ vers zéro, chacune des fonctions $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ étant holomorphe pour $z = \zeta$, les deux différences contenues dans le second membre tendent vers zéro et il vient pour la différence cherchée

$$\Phi(N) - \Phi(N') = 2i\pi R(\theta, \zeta),$$

$R(\theta, \zeta)$ désignant le résidu de la fonction $\frac{F(t, \zeta)}{F(t, \zeta)}$ relatif au pôle $t = \theta$. On voit aussi de quelle manière doivent être supposés pris les points $N$ et $N'$, sans qu'il soit besoin d'insister là-dessus; le point $N(\zeta + \varepsilon)$ doit être tel qu'un observateur parcourant le chemin rectiligne $t_0 t_1$ laisse à sa gauche le point $\theta + \varepsilon_1$ correspondant.

La démonstration précédente n'a pas l'avantage, comme celle que vous avez donnée, de n'exiger que des considérations élémentaires sur les intégrales définies. Cependant, en raison même de sa généralité et de ses rapports avec le théorème de CAUCHY, il m'a semblé qu'elle n'était pas dépourvue d'intérêt.

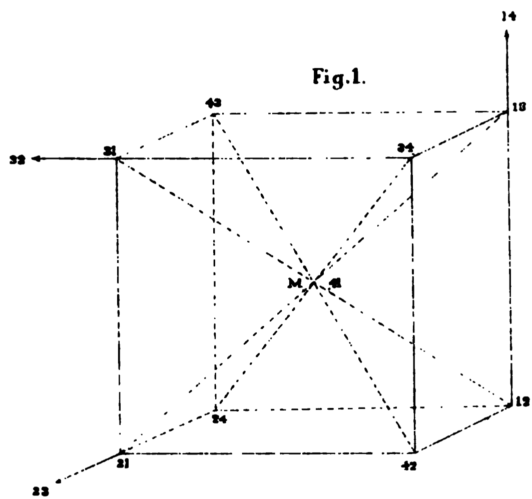


Fig. 1.

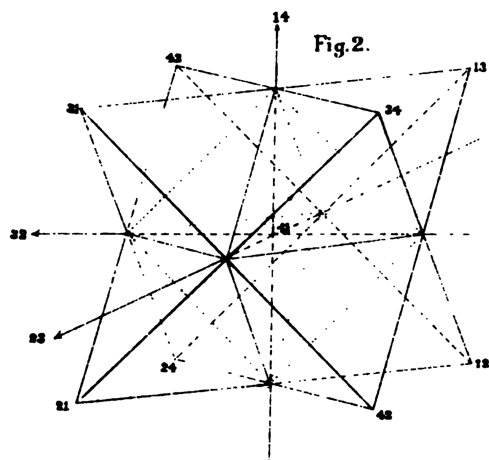


Fig. 2.

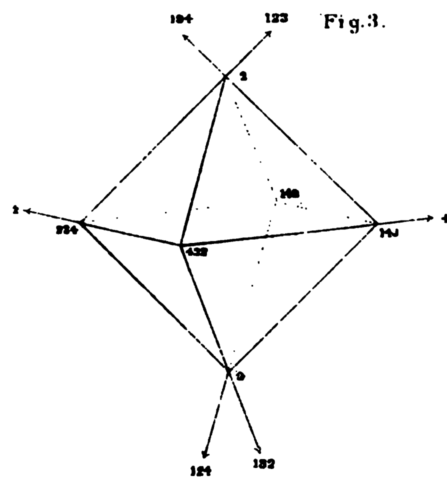


Fig. 3.

# MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES

PAR

H. POINCARE.

## § 1. *Séries Thétafuchsiennes.*

Dans un mémoire antérieur, j'ai montré comment il est possible de former des groupes discontinus avec des substitutions de la forme:

$$(1) \qquad \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

en choisissant les coëfficients $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ de telle façon que les diverses substitutions du groupe n'altèrent pas un certain cercle appelé cercle fondamental. Je supposerai dans tout ce qui va suivre que ce cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, de telle sorte que son équation soit:

$$\text{mod. } z = 1.$$

Je considère un de ces groupes discontinus, dits *groupes fuchsiens,* que j'appelle $G$. A ce groupe correspondra une décomposition du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux $R$, tous congruents entre eux.

Je me propose de démontrer qu'il existe toujours un système de fonctions uniformes de $z$ qui demeurent inaltérées par les diverses substitutions du groupe $G$ et que j'appellerai fonctions fuchsiennes.

A cet effet j'envisage les diverses substitutions de $G$ comprises dans la formule (1) et je pose pour abréger:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z)$$

comme je l'ai fait au § 3 du mémoire cité. Je forme ensuite la série:

$$\sum_0^\infty{}_i \text{ mod. } \left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^m \tag{2}$$

où $m$ est un entier positif plus grand que 1.

Je vais démontrer que cette série est convergente en faisant successivement diverses hypothèses:

1° Supposons d'abord que $z$ soit intérieur au cercle fondamental: il sera alors intérieur à l'un des polygones $R$, par exemple au polygone $R_h$ qui correspond à la substitution de $G$ qui a pour indice $h$ et qui s'écrit:

$$\big(z,\ f_h(z)\big)$$

Soit:

$$f_k(z) = f_i[f_h(z)]$$

La substitution

$$\big(z,\ f_k(z)\big)$$

fera partie du groupe $G$ et correspondra à un certain polygone $R_k$. Puisque $z$ est supposé intérieur à $R_h$, $f_i(z)$ sera intérieur à $R_k$.

Supposons que l'on décrive autour de $z$ un contour très petit $C_0$, enveloppant le point $z$ et étant situé tout entier à l'intérieur de $R_h$; le transformé de $C_0$ par la substitution $[z, f_i(z)]$ sera un certain contour très petit $C_i$, enveloppant le point $f_i(z)$ et situé tout entier à l'intérieur de $R_k$.

Afin d'établir la convergence de la série (2) nous allons démontrer successivement un certain nombre de lemmes.

Lemme I. *La somme des surfaces de tous les contours $C_i$ est égale à une quantité finie $C$.*

En effet ces différents contours $C_i$ en nombre infini sont tous intérieurs au cercle fondamental; de plus ils n'ont aucune partie commune puisque chacun d'eux est tout entier intérieur à l'un des polygones $R$. La somme de leurs surfaces est donc plus petite que la surface du cercle fondamental. Elle est donc finie. C. Q. F. D.

Lemme II. *Le rapport de la plus grande à la plus petite valeur que puisse prendre le module de* $\frac{df_i}{dz}$ *quand* $z$ *reste intérieur à* $C_0$ *est plus petit qu'une certaine quantité* $K$ *indépendante de* $i$.

En effet on a:

$$\frac{df_i}{dz} = \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

Le module de $\frac{df_i}{dz}$ est donc égal à $\frac{1}{\text{mod. } \gamma_i^2}$ divisé par le carré de la distance du point $z$ au point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont les divers transformés du point $\infty$; ils sont donc tous extérieurs au cercle fondamental comme le point $\infty$ lui-même et ils ne peuvent être infiniment voisins les uns des autres que dans le voisinage de ce cercle. Soient $M_i$ et $m_i$ la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre ce module quand $z$ reste intérieur à $C_0$; soient $a$ et $b$ la plus grande et la plus petite distance du point $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ au contour $C_0$; nous aurons évidemment:

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a^2}{b^2}$$

Or tous les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont extérieurs au cercle fondamental. Soient donc $A$ et $B$ la plus grande et la plus petite distance de l'origine, centre du cercle fondamental, au contour $C_0$. Ces deux distances seront plus petites que 1 puisque $C_0$ est tout entier intérieur au cercle fondamental. On a alors:

$$a < 1 + A \qquad\qquad b > 1 - B$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1 + A}{1 - B}\right)^2$$

D'ailleurs $\left(\frac{1 + A}{1 - B}\right)^2 = K$ est indépendant de $i$. C. Q. F. D.

Lemme III. *On a quel que soit* $i$

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}$$

En effet soit $z = x + iy$; la surface du contour $C_0$ s'écrit alors

$$C_0 = \int\int dx\ dy$$

et la surface du contour $C_i$

$$C_i = \int\int \left[\text{mod.}\ \frac{df_i}{dz}\right]^2 dx\ dy$$

les deux intégrales doubles étant prises à l'intérieur du contour $C_0$. On a donc

$$C_i > \int\int m_i^2\, dx\, dy > m_i^2\, C_0$$

ou bien

$$C_i > \frac{M_i^2}{K^2} C_0$$

ou enfin:

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}.$$

C. Q. F. D.

Rien n'est plus aisé maintenant que d'établir la convergence de la série (2). Supposons en effet d'abord $m = 2$; nous aurons à envisager la série:

(2) $$\sum \text{mod.} \left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 = \sum \text{mod.}\ (\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

Or nous aurons:

$$\text{mod.} \left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 < M_i^2 < \frac{K^2}{C_0} C_i.$$

Les termes de la série (2) sont donc plus petits respectivement que $\frac{K^2}{C_0}$ multiplié par le terme correspondant de la série $\sum C_i$ dont la somme est un nombre fini $C$ d'après le lemme I.

La série (2) aura donc aussi une somme finie $S$. On a par conséquent a fortiori quel que soit $i$

$$\text{mod.}\ \frac{df_i}{dz} < \sqrt{S}$$

On aura donc pourvu que $m > 2$

$$\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m < \left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^2 S^{\frac{m-2}{2}}$$

C'est à dire que chaque terme de la série $\sum\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m$ est plus petit que la constante $S^{\frac{m-2}{2}}$ multipliée par le terme correspondant de la série $\sum\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^2$ qui est convergente.

La convergence de la série (2) est donc démontrée et il s'agit ici, non d'une semi-convergence, mais d'une convergence absolue puisque tous les termes de la série sont positifs.

2° Supposons maintenant que le point $z$ soit extérieur au cercle fondamental.

Si le point $z$ est l'un des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, l'un des termes de la série est infini et la convergence est impossible. Supposons donc que le point $z$ ne se confonde avec aucun des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, je dis que la série (2) sera encore convergente.

Considérons en effet un autre point $z_1$ intérieur au cercle fondamental. La série

$$(2^a) \qquad \sum \text{mod. } \left(\frac{df_i(z_1)}{dz_1}\right)^m = \sum \text{mod. } (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}$$

est convergente d'après ce qu'on vient de voir. Je dis qu'il en est de même de la série

$$(2) \qquad \sum \text{mod. } \left(\frac{df_i}{dz}\right)^m = \sum \text{mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

En effet nous pouvons trouver une limite supérieure $R$ de mod. $\left(z_1 + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$ et une limite inférieure $r$ de mod. $\left(z + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$; car les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ ont un module fini et limité et ils ne sont pas infiniment rapprochés du point $z$.

On a donc:

$$\frac{\text{mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}}{\text{mod. } (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}} < \frac{R^{2m}}{r^{2m}}.$$

Chaque terme de la série (2) est donc plus petit que $\left(\frac{R}{r}\right)^{2m}$ multiplié par le terme correspondant de la série (2ª) qui est convergente.

La série (2) est donc aussi convergente.

3° Supposons maintenant que le point $z$ soit sur la circonférence du cercle fondamental. La démonstration précédente sera encore applicable pourvu que le point $z$ ne soit pas infiniment rapproché d'une infinité de points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. C'est ce qui arrivera si le point $z$ appartient à l'un des côtés de la 2ᵐᵉ sorte de l'un des polygones $R$. La série (2) est alors convergente. Dans le cas contraire, les termes de la série (2) sont susceptibles de croître indéfiniment, de sorte que la convergence n'a pas lieu.

Les points de la circonférence du cercle fondamental se divisent en deux classes, les uns appartiennent à l'un des côtés de la 2ᵐᵉ sorte de l'un des polygones $R$; les autres, qui ne satisfont pas à cette condition, s'appelleront les *points singuliers essentiels du groupe G*, de sorte que la condition de convergence de la série (2) pourra s'énoncer ainsi: *le point $z$ devra ne se confondre ni avec aucun des points* $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, *ni avec aucun des points singuliers essentiels du groupe G.*

La série (2) définit une fonction de $z$, mais cette fonction n'est pas monogène, comme on le voit aisément d'après la forme même de la série. La somme de la série (2) dépend également du groupe $G$ et si on suppose que les coëfficients des substitutions fondamentales de ce groupe sont des fonctions d'un certain paramètre $t$, la somme de la série (2) sera aussi une fonction de $t$.

Une petite digression est nécessaire pour me permettre d'exprimer plus nettement ma pensée. Reportons-nous au § 11 du mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé: Formation effective des groupes fuchsiens, et prenons pour fixer les idées l'exemple I de ce paragraphe. Dans cet exemple, il s'agissait de former les groupes fuchsiens de la 3ᵐᵉ famille, engendrés par un polygone normal de $2n$ côtés de la 2ᵐᵉ sorte. Nous avons vu que les coëfficients des $n$ substitutions fondamentales de ce groupe ne sont assujettis qu'à des inégalités. Il est donc possible de les exprimer en fonctions rationnelles de $3n$ paramètres arbitraires

$$u_1, u_2, \ldots u_{3n}$$

assujettis seulement à être réels et à satisfaire à certaines inégalités. Les coëfficients de toutes les substitutions du groupe sont alors, comme ceux des substitutions fondamentales, des fonctions rationnelles des paramètres $u$. De plus il est évident que tous les groupes différents que l'on obtient en attribuant aux $u$ différents systèmes de valeurs, sont tous isomorphes entre eux.

Ce qui précède peut être étendu au cas le plus général et, pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, je vais introduire une définition nouvelle qui nous sera utile dans la suite. Considérons deux polygones normaux $R_0$ et $R'_0$; je suppose qu'ils soient désignés de même dans le système de notation du § 7 du mémoire cité. Les cycles de chaque catégorie seront en même nombre dans $R_0$ et $R'_0$ et ils se correspondront un à un. Je suppose de plus que la somme des angles de $R_0$ qui appartiennent à un même cycle de la 1<sup>ère</sup> catégorie, est la même que la somme des angles du cycle correspondant de $R'_0$. Je dirai alors que les deux polygones, ainsi que les deux groupes qu'ils engendrent, font partie de la même *classe*. Il est clair que dans ce cas les deux groupes sont isomorphes entre eux.

Considérons donc une infinité de groupes appartenant à la même classe $C$ et dérivés de $n$ substitutions fondamentales. Prenons $n$ substitutions quelconques et cherchons si elles peuvent être prises pour les substitutions fondamentales d'un groupe discontinu appartenant à la classe $C$. Nous trouverons en général que leurs coëfficients doivent satisfaire à certaines égalités et à certaines inégalités. Ces coëfficients pourront alors s'exprimer rationnellement en fonctions de $p$ paramètres arbitraires

$$u_1, u_2, \dots u_p$$

assujettis seulement à rester réels et à satisfaire à certaines inégalités. La seule différence avec l'exemple I du § 11 c'est que l'on a en général

$$p < 3n,$$

au lieu de $p = 3n$.

Deux groupes qui sont de la même classe sont en général de la même famille. Il y a cependant des exceptions. Ainsi reprenons l'exemple I du § 11 que j'ai cité plus haut. Les groupes envisagés sont en général de la 3<sup>me</sup> famille; mais dans certains cas limités, ils peuvent se réduire à des

groupes de la $2^{me}$ ou de la $4^{me}$ familles. En général un groupe de la $2^{me}$ famille ou de la $4^{me}$ famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la $3^{me}$ famille qui ne se réduisent à la $2^{me}$ et à la $4^{me}$ familles que pour certaines valeurs particulières des paramètres $u$. De même un groupe de la $6^{me}$ ou de la $7^{me}$ familles peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la $5^{me}$ famille, qui ne se réduisent à la $6^{me}$ ou à la $7^{me}$ familles que pour certaines valeurs particulières des paramètres $u$. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

Ainsi il existe des classes de groupes fuchsiens qui sont tous isomorphes entre eux; les coëfficients de leurs substitutions sont des fonctions rationnelles de certains paramètres réels $u$, assujettis à certaines inégalités. Si l'on forme la série (2) à l'aide des différents groupes appartenant à une même classe, la somme de cette série sera évidemment une fonction des $u$; je dis que ce sera une fonction *continue* de ces paramètres.

Il est clair que chaque terme de la série, étant rationnel par rapport aux $u$, sera une fonction continue de ces paramètres; mais cela ne suffit pas pour qu'il en soit de même de la somme de cette série. Si nous considérons en effet une série

$$S(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots\ldots\ldots + F_n(x) + \ldots\ldots$$

dont les termes sont des fonctions continues de $x$ et qui est convergente, la somme $S(x)$ de cette série peut être une fonction discontinue de $x$. Mais faisons une hypothèse de plus. Supposons que quand on a:

$$x_1 \geqq x \geqq x_0 \qquad (3)$$

on ait:

$$\text{mod. } F_n(x) < C_n$$

et que la série

$$C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots + C_n + \ldots\ldots$$

soit convergente; on sait que $S(x)$ restera fonction continue de $x$ tant que cette variable satisfera aux inégalités (3). Ce résultat est d'ailleurs facile à étendre au cas de plusieurs variables. Ainsi pour démontrer que la série (2) est une fonction continue des $u$, il suffit de faire voir que l'on

peut trouver une infinité de nombres positifs $A_i$ (indépendants des $u$), tels que la série $\sum A_i$ soit convergente et que l'inégalité

$$\left(\text{mod.}\ \frac{df_i}{dz}\right)^m < A_i$$

soit satisfaite quels que soient les $u$, pourvu que ces paramètres restent compris entre certaines limites qui peuvent d'ailleurs être aussi voisines que l'on veut du système de valeurs pour lequel on veut démontrer la continuité de la somme de la série (2).

Pour démontrer cette continuité, je vais faire usage de certaines considérations qui me fourniront en même temps une démonstration nouvelle de la convergence de cette série, ce qui ne sera pas inutile, vu l'importance de ce résultat. Je vais rappeler quelques-unes des définitions du § 2 du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Dans ce paragraphe j'avais appelé figures congruentes deux figures qui sont les transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coëfficients réels. Posant ensuite

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

j'avais appelé $L$ d'un arc, l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod.}\ dz}{y}$$

prise le long de cet arc et $S$ d'une aire plane l'intégrale

$$\int\int \frac{dx\,dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire.

La $L$ d'un arc et la $S$ d'une aire sont des invariants pour ces figures, c'est à dire que deux arcs congruents ont même $L$ et que deux aires congruentes ont même $S$.

Plus tard au § 12 du mémoire cité, j'ai envisagé des groupes de substitutions qui n'étaient plus assujetties à être réelles, mais à conserver un certain *cercle fondamental*. Par une extension toute naturelle, deux figures seront dites congruentes lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire conservant le cercle fondamental. Il

y aura pour les arcs et les aires deux invariants analogues à ceux que nous avons rencontrés dans le cas des substitutions réelles et que nous appellerons par extension $L$ et $S$. Par exemple dans le cas qui nous occupe, le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Posons

$$z = \rho e^{i\omega}$$

J'appellerai $L$ d'un arc, l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod. } dz}{1-\rho^2}$$

prise le long de cet arc et $S$ d'une aire l'intégrale

$$\int\int \frac{\rho d\rho d\omega}{(1-\rho^2)^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire. On vérifie aisément que deux arcs congruents ont même $L$, pendant que deux aires congruentes ont même $S$.

Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon $\rho$. La $S$ sera:

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho} \frac{\rho d\rho}{(1-\rho^2)^2} = \frac{\pi\rho^2}{1-\rho^2}$$

La $L$ de son rayon sera:

$$R = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{1-\rho^2} = \frac{1}{2} L \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

Nous appellerons cette quantité le $R$ du cercle.

On a, en fonction de $R$:

$$\rho = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}$$

$$S = \frac{\pi}{4}(e^{2R} + e^{-2R} - 2)$$

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de la série (2), et supposons pour fixer les idées que le point $z$ est intérieur au cercle fondamental; la démonstration s'étendrait sans peine au cas général.

Nous décrirons autour de $z$ un contour $C_0$ que nous pourrons prendre assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de l'un des polygones $R$, de $R_h$ par exemple. Quand les paramètres $u$ varieront entre les limites que nous leur avons fixées, les polygones $R$ varieront, mais nous pourrons toujours supposer que $C_0$ est assez petit pour rester constamment tout entier à l'intérieur de $R_h$. Si nous considérons maintenant les différents transformés du point $z$, c'est à dire les différents points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, chacun de ces points sera contenu à l'intérieur d'un petit contour $C_i$ situé tout entier à l'intérieur d'un certain polygone $R_k$ ainsi qu'on l'a vu plus haut. Tous les contours $C_i$ seront *congruents entre eux et extérieurs les uns aux autres.*

J'appellerai $\sigma$ la $S$ de $C_0$ qui sera celle de tous les $C_i$. Si je considère maintenant diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par $C_0$, la $L$ de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle $\lambda$.

Démontrons maintenant quelques lemmes.

Lemme IV. *Considérons les points transformés de $z$, c'est à dire les points*

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

*qui sont intérieurs à un cercle $C'$ qui a pour centre l'origine et pour rayon*

$$\rho' = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

*le nombre de ces points est plus petit que:*

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

En effet soit $N$ ce nombre.

Si un point $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ est intérieur au cercle $C'$, le contour $C_i$ correspondant sera évidemment tout entier à l'intérieur du cercle $C''$ qui a pour centre l'origine et dont le $R$ surpasse de $\lambda$ celui du cercle $C'$, c'est à dire dont le $R$ est égal à $R' + \lambda$.

Il y a donc à l'intérieur du cercle $C''$ au moins $N$ contours $C_i$ dont la $S$ totale est égale à $N\sigma$.

Or la $S$ du cercle $C''$ est

$$\frac{\pi}{4}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

On a donc:

$$N < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

C. Q. F. D.

Lemme V. *On a identiquement:*

$$\text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \text{mod.}\ z^2}$$

En effet envisageons un contour infiniment petit $C_0$ décrit autour du point $z$ et le transformé $C_i$ de ce contour par la substitution

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

Soient $\omega_0$ et $\omega_i$ leurs surfaces, on aura:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \text{mod.}\left[\frac{d\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}}{dz}\right]^2 = \text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^4}$$

Les $S$ de $\omega_0$ et de $\omega_i$ seront:

$$\int\int \frac{dx\, dy}{(1 - \text{mod.}\ z^2)^2} = \frac{\omega_0}{(1 - \text{mod.}\ z^2)^2}$$

$$\int\int \frac{dx\, dy}{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2} = \frac{\omega_i}{\left[1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2\right]^2}$$

Or ces figures sont congruentes et ont même $S$.
On a donc

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \left[\frac{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \text{mod.}\ z^2}\right]^2$$

d'où:

$$\text{mod.}\,\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \text{mod.}\, z^2}$$

C. Q. F. D.

Considérons deux cercles ayant pour centre l'origine et passant, l'un par le point $z$ et l'autre par le point $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$.

Soit $A$ le $R$ du premier cercle et $R'$ le $R$ du second cercle. On aura:

$$\text{mod.}\, z = \frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1} \qquad \text{mod.}\,\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

et enfin

$$\text{mod.}\,\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R'} + e^{-2R'} + 2}$$

Théorème. *La série (2) est convergente.*

Décrivons en effet une infinité de cercles ayant pour centre commun l'origine et dont les $R$ croissent en progression arithmétique. Soient $K_1$, $K_2$, .... $K_n$, ... ces cercles, et soit $nr$ le $R$ du cercle $K_n$.

Ecrivons la série (2) sous la forme suivante:

$$\Sigma = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_n + \ldots\ldots \tag{2 bis}$$

On obtient le terme $U_n$ de la série (2 bis) en groupant tous les termes de la série (2) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ compris dans la couronne circulaire située entre les deux cercles $K_{n-1}$ et $K_n$.

Comme les termes de la série (2) sont positifs, un pareil groupement est licite et la convergence de la série (2 bis) entraîne celle de la série (2).

Le nombre des termes de (2) groupés ensemble dans le terme $U_n$ est, en vertu du Lemme IV, plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} - 2) < \frac{\pi}{4\sigma}e^{2(nr+\lambda)}$$

Chacun d'eux est, en vertu du Lemme V plus petit que

$$\left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)} + e^{-2(nr-r)} + 2}\right)^m < \left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)}}\right)^m$$

On a donc

$$U_n < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda+2mr} e^{-n(m-1)r}$$

Posons:

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + e)^m e^{2\lambda+2mr} = K$$

on aura:

(3) $$U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)r}}$$

$K$ sera une constante indépendante de $n$ et le second membre de l'inégalité (3) sera, puisque $m > 1$, le $n^{me}$ terme d'une progression géométrique décroissante. La série (2 bis), et par conséquent la série (2), est donc convergente.

C. Q. F. D.

Voyons quelle erreur on commet quand on se restreint dans la série (2) aux termes qui correspondent aux points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ intérieurs à un cercle ayant pour centre l'origine et dont le $R$ est $(n-1)r$. La somme des termes négligés est égale à

$$U_n + U_{n-1} + \dots\dots\dots$$

et par conséquent plus petite que

$$\frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}}$$

THÉORÈME. *La somme $\Sigma$ de la série (2) est une fonction continue des paramètres $u$.*

En effet soit $\Sigma$ la valeur de cette somme pour certaines valeurs

$$u_1, u_2, \dots\dots u_p$$

de ces paramètres $u$.

Soit $\Sigma + \Delta\Sigma$ la valeur de cette même somme pour des valeurs voisines

$$u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots\dots u_p + \Delta u_p$$

de ces mêmes paramètres. Je dis qu'on peut prendre les $\Delta u$ assez petits pour que:

$$\Delta \Sigma < \varepsilon$$

$\varepsilon$ étant une quantité donnée.

Soit $\Sigma_0$ la somme des $n - 1$ premiers termes de la série (2 bis)

$$\Sigma_0 = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_{n-1}$$

Soit

$$\Sigma_1 = U_n + U_{n+1} + \ldots\ldots.$$

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Soit de même $\Sigma_0 + \Delta \Sigma_0$, $\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1$, la somme des termes correspondants de la série $\Sigma + \Delta \Sigma$; de telle sorte que

$$\Sigma + \Delta \Sigma = (\Sigma_0 + \Delta \Sigma_0) + (\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1)$$

On aura:

$$\Sigma_1 < \frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}} \qquad \Sigma_1 + \Delta \Sigma_1 < \frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}}$$

Nous pourrons donc prendre $n$ assez grand pour que:

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \Sigma_1 + \Delta \Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

Or, une fois $n$ choisi, $\Sigma_0$ sera fonction continue des $u$; on pourra donc prendre les $\Delta u$ assez petits pour que

$$\Delta \Sigma_0 < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par conséquent pour que

$$\Delta \Sigma < \varepsilon$$

C. Q. F. D.

Considérons maintenant la série suivante

$$\theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \tag{4}$$

Je suppose:

1° que l'algorithme $H(z)$ représente une fonction rationnelle de $z$ dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais qui est d'ailleurs quelconque.

2° que le nombre $m$ est un entier plus grand que 1. La fonction $H(z)$ aura un certain nombre d'infinis

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_p.$$

Si le point $z$ se confond avec un des points

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i}$$

l'un des termes de la série est infini et par conséquent la série ne peut être convergente.

Supposons au contraire que cela n'ait pas lieu. Nous pourrons trouver un nombre positif $M$ tel que l'on ait, quel que soit $i$

$$\text{mod. } H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) < M$$

on pourra même choisir $M$ assez grand pour que cette inégalité subsiste quand on fait varier les paramètres $u$ entre certaines limites.

Je dis maintenant que la série $\theta(z)$ que j'appellerai *série thétafuchsienne* est convergente. En effet nous aurons

$$\text{mod. } \left[H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}\right] < M \text{ mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Le module de chaque terme de la série (4) est donc plus petit que le terme correspondant d'une série convergente à termes positifs. C'est à dire que la série (4) est convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

D'ailleurs on démontrerait, comme pour la somme de la série (2) que la somme de la série (4) est une fonction *continue* des paramètres $u$.

## § 2. *Classification et Propriétés Générales.*

Ainsi la série (4) est convergente sauf pour certains points singuliers; dans ces conditions elle définit une fonction $\theta(z)$ holomorphe. La fonction $\theta(z)$ est essentiellement uniforme, mais elle cesse d'être holomorphe aux points singuliers pour lesquels la série (4) cesse d'être convergente.

Ces points singuliers sont:

1° Les points

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i}$$

c'est à dire les divers transformés des infinis de $H(z)$. Ces points sont des pôles dans le voisinage desquels $\Theta(z)$ est méromorphe.

2° Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, c'est à dire les divers transformés du point $\infty$. Ces points sont encore des pôles dans le voisinage desquels $\Theta(z)$ est méromorphe.

On démontrerait ce double fait en remarquant que dans le voisinage de ces points un des termes de la série (4) devient infini et que si l'on supprime ce terme, la série reste convergente.

3° Nous avons enfin les points singuliers essentiels du groupe $G$, c'est à dire les points du cercle fondamental qui n'appartiennent pas à un côté de la 2ᵉ sorte de l'un des polygones $R$. Ce sont aussi pour la fonction $\Theta(z)$ des points singuliers essentiels.

Voici maintenant la propriété fondamentale de cette fonction. Considérons une substitution quelconque du groupe $G$, par exemple:

$$\left(z, \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) \tag{5}$$

cherchons quelle relation il y a entre

$$\Theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) \text{ et } \Theta(z)$$

Le système des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formant un groupe dont fait partie la substitution (5) sera identique au système des substitutions:

$$\left[z, \frac{\alpha_i\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) + \beta_i}{\gamma_i\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) + \delta_i}\right] = (z, f_i[f_k(z)])$$

en posant pour abréger:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z) \qquad \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} = f_k(z)$$

ce qui permet d'écrire:

$$\theta(z) = \sum H[f_i[f_k(z)]] \left[\frac{d[f_i[f_k(z)]]}{dz}\right]^m$$

ou:

$$\theta(z) = \sum H[f_i(f_k)] \left(\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right)^m \left(\frac{df_k}{dz}\right)^m$$

On a d'ailleurs:

$$\theta(f_k) = \sum H[f_i(f_k)] \left(\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right)^m$$

On a donc:

$$\theta(f_k) = \theta(z)\left(\frac{df_k}{dz}\right)^{-m}$$

ou bien:

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}. \tag{6}$$

Nous appellerons *fonction thétafuchsienne* toute fonction uniforme de $z$ jouissant de la propriété (6). Nous classerons les fonctions thétafuchsiennes de la même façon que les groupes fuchsiens, à l'aide des propriétés du polygone normal $R_0$ correspondant.

On a vu que les polygones $R_0$ pouvaient se distribuer en 7 familles et que la 1ère, la 2me, la 4me, la 6me et la 7me de ces familles se subdivisent en deux ordres. Mais tout groupe du 2d ordre de la 2me, de la 4me, de la 6me et de la 7me familles est identique à un groupe de la 3me ou de la 5me familles, on à un groupe du 1er ordre de la 6me ou de la 7me familles. (Voir § 9 et 11 du mémoire sur les groupes fuchsiens.) Nous pouvons donc toujours supposer que le groupe $G$ n'appartient pas au 2d ordre de la 2me, de la 4me, de la 6me ou de la 7me familles.

Cela posé, je dirai que la fonction $\theta(z)$ fait partie de la 1ère, de la 3me et de la 5me familles si le groupe $G$ fait partie de l'une de ces familles et que la fonction $\theta(z)$ fait partie de la 2me, de la 4me, de la

$6^{me}$ ou de la $7^{me}$ familles si le groupe $G$ appartient au $1^{er}$ ordre de l'une de ces familles.

De même je dirai qu'une fonction thétafuchsienne est du genre $p$, si le groupe $G$ correspondant est de ce genre.

Je puis également étendre aux fonctions thétafuchsiennes la classification des groupes fuchsiens en classes dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent.

Envisageons d'abord les fonctions de la $1^{ère}$, de la $2^{me}$ et de la $5^{me}$ familles. Les polygones $R$ correspondants n'ont pas de côtés de la $2^{me}$ sorte, de telle manière que tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels. Le plan se trouve divisé en deux parties, à savoir l'intérieur et l'extérieur de ce cercle, par une ligne singulière essentielle; il faut en conclure, conformément aux principes actuellement admis dans la théorie des fonctions, et mis en lumière par les travaux de M. WEIERSTRASS, que le développement (4) représente deux fonctions distinctes, selon que $z$ est intérieur ou extérieur au cercle fondamental. La première de ces fonctions n'existera qu'à l'intérieur de ce cercle et admettra comme espace lacunaire toute la partie du plan qui lui est extérieure; la seconde au contraire n'existera qu'à l'extérieur du cercle fondamental. Dans ce qui va suivre nous n'envisagerons jamais que la première de ces fonctions; en effet la seconde d'entre elles, c'est à dire celle qui n'existe qu'à l'extérieur du cercle fondamental, peut aisément par un changement de $z$ en $\frac{1}{z}$ se ramener à une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Considérons donc une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et définie par une série telle que (4); nous pouvons faire deux hypothèses:

Nous pouvons supposer qu'un ou plusieurs des infinis de $H(z)$ sont intérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\Theta(z)$ aura des infinis (sauf dans certains cas exceptionnels où plusieurs infinis de cette fonction se détruisent mutuellement) et nous dirons qu'elle est de la *1ère espèce;* nous serons certains alors que la somme de la série (4) n'est pas identiquement nulle puisque cette somme peut croître indéfiniment.

On peut supposer au contraire que tous les infinis de $H(z)$ sont extérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\Theta(z)$ n'a pas d'infinis

et nous dirons qu'elle est de la *2<sup>de</sup> espèce.* La fonction $\theta(z)$ peut alors se développer en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z$ et qui reste convergente tant que $z$ reste intérieur au cercle fondamental, c'est à dire tant que la fonction $\theta(z)$ existe.

Rien n'empêche dans ce cas que la somme de la série (4) ne soit identiquement nulle et nous démontrerons en effet plus loin que toutes les fonctions $\theta$ de *2$^{de}$ espèce* s'expriment linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Passons maintenant aux fonctions de la 3$^{e}$, de la 4$^{e}$, de la 6$^{e}$ et de la 7$^{e}$ familles; les polygones $R$ ont alors des côtés de la 2$^{de}$ sorte, tous les points du cercle fondamental ne sont plus des points singuliers essentiels; nous n'avons plus une ligne singulière essentielle, mais une infinité de points singuliers isolés. Il résulte de là que la série (4) au lieu de représenter deux fonctions distinctes selon que $z$ est intérieur ou extérieur au cercle fondamental, représente une seule et même transcendante qui est partout holomorphe, sauf en certains points isolés. La fonction $\theta(z)$ est donc une transcendante uniforme existant dans toute l'étendue du plan et présentant une infinité de points singuliers essentiels.

On peut se demander quelle place elle occupe dans la classification que M. Mittag-Leffler a donné de pareilles fonctions dans sa communication du 3 Avril 1882 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

Les points singuliers essentiels étant en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de 2$^{de}$ espèce; ceux-ci à leur tour s'ils sont en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de 3$^{me}$ espèce, et ainsi de suite.

Je dis que nous ne serons jamais arrêtés et que nous trouverons ainsi une infinité de points singuliers de toutes les espèces. En effet si nous avons une infinité de points singuliers de la $n - 1^{e}$ espèce; il y aura au moins un point singulier de la $n^{e}$ espèce; mais s'il y en a un, il y en aura une infinité, car tous ses transformés par les diverses substitutions du groupe $G$ devront aussi être des points singuliers de la $n^{e}$ espèce.

C. Q. F. D.

Nous avons donc affaire à une de ces fonctions que M. MITTAG-LEFFLER a appelées du 2e genre.

Il semble d'abord que toutes les fonctions aient des infinis, car elles existent dans tout le plan et elles doivent avoir pour pôles ceux de la fonction rationnelle $H(z)$ qui doit devenir infinie en quelque point du plan. Mais il peut arriver que plusieurs des infinis de la fonction $\theta(z)$ se détruisent mutuellement; de sorte qu'on peut construire comme dans le cas précédent des fonctions thétafuchsiennes de la 2e espèce; on en verra un exemple au § 8.

Parmi les points singuliers de nos fonctions thétafuchsiennes, il en est qui doivent particulièrement attirer notre attention; ce sont les sommets des polygones $R$ qui sont de la 2de catégorie et qui appartiennent à un cycle de la 3me sous-catégorie. (Voir le § 5 du mémoire sur les groupes fuchsiens).

Soit $\alpha$ un pareil sommet, il y aura parmi les substitutions du groupe $G$ une substitution parabolique de la forme:

$$\left(\frac{1}{z-\alpha}, \frac{1}{z-\alpha}+\beta\right)$$

C'est là la définition même des cycles de la 3me sous-catégorie.

Posons:

$$\frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{z-\alpha}=t \qquad \frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{f_i(z)-\alpha}=\varphi_i(t)$$

en conservant pour le symbole $f_i(z)$ la signification qu'on lui a donnée plus haut, c'est à dire:

$$f_i(z)=\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$$

Définissons maintenant un symbole $H_1$ de la façon suivante:

$$H_1(t)=H\left(\alpha+\frac{2i\pi}{\beta t}\right)\left[\frac{-2i\pi}{\beta t^2}\right]^m$$

Il est clair que $H_1$ sera l'algorithme d'une fonction rationnelle. On trouvera alors identiquement:

$$\theta(z)=\sum H[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m=\sum H_1[\varphi_i(t)]\left(\frac{d\varphi_i(t)}{dt}\right)^m\left(\frac{dt}{dz}\right)^m$$

Mais la série $\theta(z)$ étant absolument convergente on peut en ordonner les termes comme on le veut. Voici comment nous allons les ordonner:

Parmi les fonctions $\varphi_i(t)$ on peut en choisir une infinité

$$\theta_0(t) = t,\ \theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \ldots\ldots$$

de telle façon que toute fonction $\varphi_i(t)$ puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme:

$$\varphi_i(t) = \theta_k(t + 2hi\pi)$$

$h$ étant un entier positif ou négatif; ce qui permet d'écrire:

$$\theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H_1[\theta_k(t + 2hi\pi)] \left[\frac{d\theta_k(t + 2hi\pi)}{dt}\right]^m$$

Considérons un nouvel algorithme $H'_k(t)$ défini comme il suit:

$$H'_k(t) = H_1[\theta_k(t)]\left(\frac{d\theta_k}{dt}\right)^m$$

d'où:

$$\theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t + 2hi\pi)$$

Il faut d'abord effectuer la sommation par rapport à $h$; or $H'_k(t)$ est une fonction rationnelle de $t$ qui tend vers 0 quand $t$ tend vers l'infini. On aura donc:

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t + 2hi\pi) = H''_k(e^t)$$

$H''_k(e^t)$ désignant une fonction rationelle de $e^t$ qui tend vers 0 quand $t$ tend vers l'infini. Il vient donc:

$$\theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_k H''_k(e^t)$$

La convergence de cette série est évidente, puisqu'on l'a obtenue en groupant d'une certaine manière les termes de la série (4) qui est uni-

formément convergente. De plus les termes sont rationnels en $e$ et leurs infinis ne sont pas infiniment rapprochés dans le voisinage de

$$e^t = 0 \quad \text{ou de} \quad e^t = \infty$$

de telle sorte que l'on peut trouver une limite supérieure et inférieure des modules des valeurs de $e^t$ qui rendent infinie l'une des fonctions $H''_k$.

Il suit de là que dans le voisinage du point singulier $z = \alpha$ la fonction $\theta(z)(z-\alpha)^{2m}$ est holomorphe en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ ou en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ selon que l'on approche du point $\alpha$ par l'intérieur ou par l'extérieur du cercle fondamental.

En d'autres termes, $\alpha$ est pour la fonction $\theta$ un *point singulier logarithmique.*

Ainsi, si l'on envisage les différents sommets des polygones $R$, on reconnaîtra:

1° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 1ère et de la 3me catégorie sont pour la fonction $\theta$ des points ordinaires ou des pôles.

2° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 3me sous-catégorie sont des points singuliers logarithmiques.

3° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 4me sous-catégorie sont des points singuliers d'une nature plus élevée.

## § 3. *Zéros et Infinis.*

Nous allons maintenant étudier la distribution des zéros et des infinis de la fonction $\theta$. Il est clair que si un point $z$ est pour cette fonction un zéro ou un infini, il en sera de même de tous les points correspondants à $z$, c'est à dire de tous les points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. De cette façon à tout zéro contenu à l'intérieur du polygone $R_0$, correspondra un zéro contenu dans chacun des polygones $R$, et que nous ne regarderons pas comme *réellement distinct* du premier. De sorte que le nombre des zéros et des infinis *réellement distincts* de la fonction $\theta$ sera le nombre des zéros et des infinis contenus à l'intérieur de $R_0$, si la fonction n'existe que dans le cercle fondamental, et à l'intérieur de $R_0 + R'_0$ si elle existe dans tout

le plan. Je rappelle que $R'_0$ est le polygone symétrique de $R_0$ par rapport au cercle fondamental.

Cependant quelques conventions spéciales sont nécessaires, si l'on veut pouvoir énoncer simplement le résultat auquel nous allons arriver au sujet du nombre des zéros et des infinis. Il est d'abord évident qu'un zéro double ou un infini double doit compter pour deux zéros ou pour deux infinis; de même pour les zéros et les infinis multiples. Mais outre les zéros contenus à l'intérieur de $R_0$, il peut y en avoir qui se trouvent sur le périmètre de ce polygone. Supposons qu'il y en ait un sur un côté $ab$ de la 1ère sorte, il y en aura un autre, correspondant au premier sur le côté conjugué de $ab$. Ces deux zéros ne seront pas réellement distincts et on ne devra les compter que pour un seul zéro, ou, si l'on veut, on devra compter chacun d'eux pour un demi zéro. Supposons maintenant qu'un sommet de la 1ère catégorie soit un zéro d'ordre $p$; les sommets qui font partie du même cycle seront au nombre de $n$ par exemple et chacun d'eux sera un zéro d'ordre $p$ comme le premier. Supposons que la somme des angles qui correspondent à ces sommets soit $\frac{2\pi}{K}$; chacun d'eux appartiendra à $n.K$ polygones différents, de manière qu'on devra en quelque sorte le partager entre ces $n.K$ polygones et que la part du polygone $R_0$ sera un zéro d'ordre $\frac{p}{n.K}$. Il résulte de là que les différents sommets du cycle représenteront seulement $\frac{p}{K}$ zéros distincts.

Il est facile d'étendre cette convention au cas où l'un des zéros est un des sommets de la 2de catégorie et appartenant à un cycle de la 3me sous-catégorie. Nous avons vu que si $a$ est un pareil sommet, la fonction $\theta$ peut se mettre sous la forme:

$$(z-a)^{2m}\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(a-z)}}\right]$$

$\Phi$ étant une fonction holomorphe de $e^{\frac{2i\pi}{\beta(a-z)}}$ s'annulant pour

$$z=a$$

c'est à dire pour:

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta(a-z)}}=0$$

$u = 0$ sera alors un zéro de la fonction rationnelle $\Phi(u)$. Supposons que ce soit un zéro d'ordre $p$. Nous dirons alors que les différents sommets du cycle auquel appartient $\alpha$ représentent $p$ zéros distincts de la fonction $\theta$.

Ce qui précède s'applique évidemment aux infinis.

Occupons-nous d'abord des infinis. La série (4) devient infinie quand $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ ou $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ devient infini. Supposons d'abord que la fonction $\theta$ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Alors $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ ne peut devenir infini; de plus à chaque infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspondra en général un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ qui sera intérieur à $R_0$.

Donc:

*Le nombre des infinis distincts de $\theta$ est égal au nombre des infinis de $H$ intérieurs au cercle fondamental.*

Supposons maintenant que $\theta$ existe dans tout le plan.

A tout infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ intérieur à $R_0$.

A tout infini de $H(z)$ extérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ intérieur à $R'_0$.

A l'intérieur de chacun des polygones $R'_i$ et par conséquent à l'intérieur de $R'_0$, nous trouverons un des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ qui sont pour $\theta$ des infinis d'ordre $2m$. Il y a cependant une exception les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont les différents points correspondants de l'infini; la surface de l'un des polygones $R$ contient le point $\infty$ et ne contient pas de point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; le point $\infty$ n'est pas en général un infini de $\theta$. Nous supposerons, pour éviter cette difficulté, que le polygone $R'_0$ ne contient pas le point $\infty$ et nous pourrons énoncer le résultat suivant:

Le nombre des infinis de $\theta$ contenus à l'intérieur de $R_0 + R'_0$, c'est à dire *le nombre des infinis distincts de $\theta$ est égal au nombre des infinis de $H$ augmenté de $2m$.*

Passons à la recherche des zéros. Parmi eux il y en a qui doivent

d'abord attirer l'attention; je veux parler des sommets de la 1ère catégorie qui dans certains cas sont forcément des zéros d'ordre déterminé.

Soit $\alpha$ un sommet de la 1ère catégorie et $\alpha'$ son symétrique par rapport au cercle fondamental. Supposons que $\alpha$ fasse partie d'un cycle et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{K}$. L'une des substitutions de $G$ sera:

$$\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'},\ e^{\frac{2i\pi}{K}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right) = \left(z,\ f_1(z)\right)$$

Nous aurons:

$$\theta\left(f_1(z)\right) = \theta(z)\left(\frac{df_1}{dz}\right)^{-m}$$

ou

$$\theta(f_1)(f_1-\alpha')^{2m} = \theta(z)(z-\alpha')^{2m}\left[\frac{d\left(\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'}\right)}{d\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)}\right]^{-m} \tag{5}$$

Mais:

$$\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'} = e^{\frac{2i\pi}{K}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}$$

Remarquons de plus que nous pouvons développer $\theta(z)(z-\alpha')^{2m}$ suivant les puissances de $\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}$; de façon à poser:

$$\theta(z)(z-\alpha')^{2m} = \theta_1\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right) = \sum A_p\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p$$

L'équation (5) devient alors:

$$\sum A_p e^{\frac{2ip\pi}{K}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p = \sum A_p e^{-\frac{2mi\pi}{K}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p$$

Cette identité exige que l'on ait:

$$A_p = 0 \qquad \text{ou bien:}$$

$$e^{\frac{2i\pi p}{K}} = e^{-\frac{2mi\pi}{K}}$$

c'est à dire:

$$p + m \equiv 0 \mod. K. \tag{6}$$

Donc le développement de $\theta_1$ ne contient que des termes dont l'ordre $p$ satisfait à la congruence (6). Si donc $K$ ne divise pas $m$, $z = \alpha$ est un zéro pour $\theta_1$ et par conséquent pour $\theta$.

Ce zéro est d'ordre au moins égal au reste de la division de $m(K-1)$ par $K$; et si l'ordre de ce zéro diffère de ce reste c'est d'un multiple de $K$. Il y a exception évidemment si $\alpha$ est un infini de $\theta$.

De même nous avons vu que les sommets qui appartiennent à un cycle de la 3<sup>me</sup> sous-catégorie sont en général des zéros de la fonction $\theta$.

Nous allons maintenant chercher quel est le nombre des zéros réellement distincts de notre fonction $\theta$ et pour fixer les idées nous supposerons qu'il s'agit d'une fonction de la 1<sup>ère</sup> famille. Soit $q$ le nombre des infinis distincts, soit $p$ le nombre des zéros réellement distincts, c'est à dire le nombre cherché; soit maintenant $p_0$ le nombre des zéros situés à l'intérieur de $R_0$ en laissant de côté les zéros qui pourraient se trouver sur le périmètre et sur les sommets. Nous supposerons, ce qui arrivera en général, qu'il n'y a pas de zéro sur le périmètre en dehors de ceux qui sont sur les sommets; s'il y en avait, on n'aurait qu'à considérer les zéros situés sur les côtés comme des sommets séparant deux côtés consécutifs du polygone situés dans le prolongement l'un de l'autre. Supposons maintenant que les sommets se répartissent en un certain nombre de cycles de la 1<sup>ère</sup> catégorie $C_1$, $C_2$, ...... $C_i$, ...... Supposons que tous les sommets du cycle $C_i$ soient des zéros d'ordre $p_i$ et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{K_i}$ de telle sorte que l'ensemble de ces zéros doivent être comptés, d'après la convention faite plus haut pour $\frac{p_i}{K_i}$ zéros distincts. On devra avoir:

$$p_i + m \equiv 0 \mod. K_i$$

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i}$$

Le problème consiste à évaluer $p_0$. Pour cela il faut prendre l'intégrale:

$$\int \frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)} \tag{7}$$

le long du périmètre de $R_0$. La partie réelle de cette intégrale sera nulle et la partie imaginaire s'écrira:

$$2i\pi(p_0 - q)$$

L'évaluation de l'intégrale (7) présente ici une difficulté spéciale.

En effet la fonction sous le signe $\int$ devient infinie en divers points du contour d'intégration puisque nous avons vu qu'un certain nombre de sommets de $R_0$ étaient des zéros de $\theta$. On tournera cette difficulté en décrivant autour de chacun de ces sommets comme centre des arcs de cercle infiniment petits, raccordant les deux côtés qui aboutissent au sommet considéré; il faudra décrire ces arcs de cercle à l'intérieur de $R_0$, de façon à laisser les sommets en dehors du contour, puisque nous voulons évaluer $p_0$, c'est à dire le nombre des zéros *intérieurs* à $R_0$.

Il faudra donc évaluer l'intégrale (7):

1° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets.

2° le long des côtés de la 1ère sorte.

3° le long des côtés de la 2de sorte.

Il suffira d'ailleurs de calculer la partie imaginaire de l'intégrale, car nous savons d'avance que la partie réelle est nulle, et cette partie imaginaire n'est autre chose que la variation de l'argument de $\theta$.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction de la 1ère famille, de telle façon que nous n'ayons que des sommets de la 1ère catégorie et des côtés de la 1ère sorte. Soit $2n$ le nombre de ces côtés.

Considérons d'abord un des petits arcs de cercle décrit autour d'un sommet; supposons que ce sommet appartienne au cycle $C_i$ dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{K_i}$ et dont tous les sommets sont des zéros d'ordre $p_i$. Soit $\lambda$ l'angle du sommet considéré. L'intégrale prise le long du petit arc de cercle correspondant sera $-p_i\lambda$; prise le long de tous les arcs de cercle décrits autour des divers sommets du cycle, elle sera:

$$-\frac{2\pi}{K_i}p_i$$

Enfin l'intégrale (7) prise le long de tous les arcs infiniment petits décrits autour des sommets de $R_0$ sera:

$$- 2\pi \sum \frac{p_i}{K_i}.$$

Il reste à évaluer notre intégrale le long des côtés de la 1[ère] sorte. Soient donc $ab$, $a'b'$ deux côtés conjugués de $R_0$. Il faut calculer:

$$J = \int_a^b \frac{\theta' dz}{\theta} + \int_{b'}^{a'} \frac{\theta' dz}{\theta} = \int_a^b \frac{\theta' dz}{\theta} - \int_{a'}^{b'} \frac{\theta' dz}{\theta}$$

Soit $(z, f_i(z))$ celle des substitutions du groupe $G$ qui change $a'b'$ en $ab$. Nous aurons, d'après ce qu'on a vu plus haut:

$$\theta(f_i) = \theta(z) \left( \frac{df_i}{dz} \right)^{-m}$$

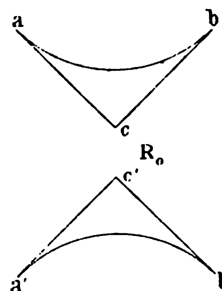
ou:

$$L\theta(f_i) = L\theta - mL\frac{df_i}{dz}.$$

Donc:

$$J = \int_{a'}^{b'} \left[ \frac{\theta'(f_i)}{\theta(f_i)} - \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right] dz = -m \int_{a'}^{b'} d\left[ L\frac{df_i}{dz} \right]$$

Il reste donc à chercher comment varie la partie imaginaire de $L\frac{df_i}{dz}$ ou l'argument de $\frac{df_i}{dz}$ quand $z$ varie de $a'$ à $b'$.




Je rappelle que les côtés de $R_0$, $ab$, $a'b'$ sont des arcs de cercle; je vais mener aux points $a$, $b$, $a'$, $b'$ les tangentes aux arcs de cercle $ab$, $a'b'$; soient $ac$, $bc$; $a'c'$, $b'c'$ ces tangentes. Soient maintenant $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$ les arguments des quantités imaginaires $(c - a)$, $(b - c)$, $(c' - a')$, $(b' - c')$.

Supposons qu'on opère de la même manière pour tous les côtés du polygone curviligne $R_0$; on obtiendra un polygone rectiligne $P_0$ de $4n$ côtés, dont les côtés seront les tangentes menées aux côtés de $R_0$ par les sommets de $R_0$ et dont les sommets seront ceux de $R_0$ et les points tels que $c$, $c'$; je désignerai simplement par les lettres $c$ et $c'$ les angles du

polygone $P_0$ qui correspondent aux sommets $c$ et $c'$. Outre les sommets tels que $c$, le polygone $P_0$ admet $2n$ angles qui lui sont communs avec $R_0$ et dont la somme est $\sum \frac{2\pi}{K_i}$, d'où la relation:

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{p_i} = (4n - 2)\pi.$$

Nous pouvons écrire maintenant:

$$\arg. \frac{df_i}{dz} = \omega_1 - \omega_3 \qquad \text{pour } z = a'$$

$$\arg. \frac{df_i}{dz} = \omega_2 - \omega_4 \qquad \text{pour } z = b'$$

$$J = m(\omega_2 - \omega_1 - \omega_4 + \omega_3)$$
$$c = \omega_2 - \omega_1 + \pi$$
$$c' = \pi - \omega_4 + \omega_3$$
$$J = m(c + c' - 2\pi)$$

L'intégrale (7) prise le long de tous les côtés de la 1[ère] sorte aura donc pour partie imaginaire $\sum J$ ou bien:

$$m\sum c - 2nm\pi$$

ou

$$(4n - 2)m\pi - 2\pi\sum \frac{m}{K_i} - 2nm\pi = (n - 1)2m\pi - 2\pi\sum \frac{m}{K_i}$$

L'intégrale (7) se réduit alors à:

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i}\right]$$

d'où la relation:

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i}$$

Ce nombre $p_0$ des zéros intérieurs à $R_0$ est entier à cause des congruences:

$$p_i + m \equiv 0 \quad \text{mod. } K_i.$$

Exprimons maintenant le nombre $p$ des zéros réellement distincts, défini par les conventions faites plus haut; nous trouverons:

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$$

Ainsi l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre $m$, du nombre $2n$ des côtés de $R_0$ et de la somme $\sum \frac{2\pi}{K_i}$ des angles de ce polygone.

Cette somme satisfait à l'inégalité:

$$\sum \frac{2\pi}{K} < \pi(2n - 2)$$

d'où

$$\sum \frac{1}{K_i} < n - 1$$

et par conséquent $p > q$. L'expression $\left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$ est proportionnelle à la $S$ du polygone $R_0$.

Supposons maintenant que la fonction $\theta$ soit de la 2ᵉ ou de la 6ᵉ familles. Nous n'aurons toujours que des côtés de la 1ère sorte, mais outre les cycles de la 1ère catégorie $C_1, C_2, \ldots. C_i, \ldots.$ que nous avions rencontrés dans le premier cas, nous aurons des cycles $C''_1, C''_2, \ldots.. C''_i$ de la 2de catégorie et de la 3me sous-catégorie. Considérons le cycle $C''_i$; divers sommets de ce cycle seront des zéros; je suppose d'après la convention faite plus haut qu'ils comptent pour $h_i$ zéros distincts. On aura alors:

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i} + \sum h_i \tag{8}$$

Il faut évaluer l'intégrale (7):

1° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la 1ère catégorie.

2° le long des côtés de la 1ère sorte.

3° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la 2de catégorie.

La première partie de l'intégrale se réduit comme plus haut à $-2i\pi\sum\frac{p_i}{K_i}$; la seconde à

$$\sum J = 2i\pi m\left(n - 1 - \sum\frac{1}{K_i}\right)$$

Pour évaluer la troisième il suffit d'étudier comment varie l'argument de $\theta$ dans le voisinage des sommets de la 2$^{de}$ catégorie; à cet effet, il faut mettre la fonction $\theta$ sous la forme:

$$(z-a)^{-2m}\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(a-z)}}\right]$$

($\Phi$ étant l'algorithme d'une fonction holomorphe), ce qui est possible, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On reconnaîtra alors que cette 3$^{me}$ partie de l'intégrale se réduit à $-2i\pi\sum h_i$.

Il restera donc pour l'expression de l'intégrale (7)

$$2i\pi\left[m(n-1) - \sum\frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i\right]$$

d'où:

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum\frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i$$

et:

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum\frac{1}{K_i}\right)$$

Nous sommes conduits pour l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts à la même expression que dans le cas précédent. Cet excès est proportionnel au nombre $m$ et dépend en outre du nombre des côtés du polygone $R_0$ et de la somme de ses angles; ou bien encore il est proportionnel à la fois à $m$ et à la $S$ de $R_0$.

Supposons enfin que la fonction $\theta$ soit de la 3$^{me}$, de la 4$^{me}$, de la 5$^{me}$ ou de la 7$^{me}$ familles, c'est à dire existe dans tout le plan. Nous aurons alors des côtés de la 1$^{ère}$ et de la 2$^{de}$ sorte, des sommets de la 1$^{ère}$ et de la 3$^{me}$ catégorie et des sommets de la 2$^{me}$ catégorie appartenant à des cycles de la 3$^{me}$ sous-catégorie. Nous allons chercher le nombre

des zéros et des infinis distincts; ce nombre sera défini comme précédemment. Cependant il y a une remarque à faire au sujet du nombre des infinis distincts; ce sera en général le nombre des infinis intérieurs à $R_0$ et à $R'_0$, mais une difficulté se présentera si le point $\infty$ fait partie de la région $R'_0$. Dans ce cas il peut se faire que $\infty$ ne soit pas un infini de $\theta$, mais que tous les transformés du point $\infty$ par les substitutions du groupe $G$ soient des infinis de $\theta$. Le nombre des infinis réellement distincts sera égal alors au nombre des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$ *plus un*. Pour éviter cette difficulté, je supposerai que le polygone $R_0$ ait été choisi de telle sorte que le point $\infty$ ne fasse pas partie de la région $R'_0$.

Cela posé reprenons l'intégrale (7); il va falloir l'évaluer le long du contour de $R_0$, puis le long du contour de $R'_0$ et ajouter. Soit $2n$ le nombre des côtés de la 1ère sorte; $l$ celui des côtés de la 2de sorte; conservons d'ailleurs les notations employées plus haut: $p_0$ et $q$ représenteront alors le nombre des zéros et des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$.

Il faut évaluer l'intégrale

1° le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la 1ère catégorie.

2° le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la 3me sous-catégorie.

3° le long des côtés de la 1ère sorte.

4° le long des côtés de la 2de sorte.

La première et la seconde partie de l'intégrale seront égales à $-2i\pi\left(\sum\frac{p_i}{K_i} + \sum h_i\right)$.

La troisième sera égale comme plus haut à $\sum J$. Construisons un polygone $P_0$ en menant par les différents sommets de $R_0$ des tangentes aux côtés de la 1ère sorte. Le polygone rectiligne ainsi obtenu aura $4n + l$ côtés; ses angles seront de deux sortes: les uns seront analogues aux angles que nous avons appelés plus haut $c$, $c'$; les autres lui seront communs avec les angles de $R_0$, mais parmi ceux-ci les uns, dont la somme sera $\sum\frac{2\pi}{K_i}$, correspondront aux sommets de la 1ère catégorie; les autres, qui seront nuls, correspondront aux sommets de la 2de catégorie;

les autres enfin, qui seront droits et au nombre de $2l$, correspondront aux sommets de la 3[me] catégorie; d'où la relation:

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{K_i} + l\pi = (4n + l - 2)\pi$$

Or on a trouvé plus haut:

$$\sum J = m \sum c - 2nm\pi$$

on aura donc:

$$\sum J = 2i\pi m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$$

Appelons enfin $2\pi I$ la partie imaginaire de l'intégrale prise le long des côtés de la 2[e] sorte; nous trouverons pour l'intégrale (7) prise le long de $R_0$:

$$2i\pi\left[m(n - 1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i + I\right]$$

Il faut prendre maintenant l'intégrale (7) le long de $R'_0$. Supposons que, d'après les conventions faites plus haut, les sommets de la 1[ère] catégorie de $R'_0$ comptent pour $\sum \frac{p'_i}{K_i}$ zéros distincts et ceux de la 2[de] catégorie pour $\sum h'_i$ zéros distincts. Nous trouverons pour la valeur de l'intégrale prise le long de $R'_0$ en raisonnant comme plus haut:

$$2i\pi\left[m(n - 1) - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum h'_i - I\right]$$

ou en ajoutant les deux intégrales:

$$2i\pi\left[2m(n - 1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum h_i - \sum h'_i\right]$$

d'où:

$$p_0 = q + 2m(n - 1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum (h_i + h'_i)$$

Mais si $p$ désigne comme plus haut le nombre des zéros distincts, on aura:

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i} + \sum \frac{p'_i}{K_i} + \sum h_i + \sum h'_i$$

d'où:

$$p = q + 2m\left(n - 1 - \sum\frac{1}{K_i}\right)$$

Ainsi l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre $m$, du nombre $2n$ des côtés de la 1ère sorte et de la somme des angles de la 1ère catégorie.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, dans tous les cas possibles, le nombre des zéros et celui des infinis distincts est toujours fini.

## § 4. *Fonctions Fuchsiennes.*

Si une fonction $F(z)$ est uniforme, si elle se reproduit par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien $G$ de telle sorte que si

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

est une substitution de ce groupe on ait identiquement:

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z)$$

si enfin le fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et d'infinis réellement distincts, je dirai que cette fonction est une *fonction fuchsienne.* Existe-t-il de pareilles fonctions? Il est aisé d'en former.

Considérons en effet deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe $G$ et à une même valeur de l'entier $m$, leur quotient sera une fonction fuchsienne. Il est aisé de généraliser ce procédé. Nous dirons que le nombre $m$ est le *degré* de la série $\theta$. Si nous envisageons ensuite un produit de plusieurs séries telles que $\theta$, le degré de ce monôme sera la somme des degrés de tous les facteurs. Si nous considérons un polynôme entier par rapport à diverses séries $\theta$, nous dirons que ce polynôme est homogène et de degré $K$ si tous ses termes sont d'un même degré $K$; le quotient de deux polynômes homogènes de degrés $K$ et $K'$ sera une fonction rationnelle homogène de degré $K - K'$. Il est clair que toute fonction rationnelle, homogène de degré 0 par rapport à diverses

séries $\theta$ est une fonction fuchsienne. Nous verrons plus tard comment toute fonction fuchsienne peut s'exprimer de cette façon.

Quelles sont les propriétés des fonctions fuchsiennes?

1° *Les singularités sont les mêmes que celles des fonctions thétafuchsiennes;* nous avons par conséquent des fonctions fuchsiennes n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et pour lesquelles toute la circonférence de ce cercle est une ligne singulière essentielle, et d'autres qui existent dans tout le plan et dont les points singuliers, situés tous sur le cercle fondamental, sont isolés quoique en nombre infini.

2° Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne $F(z)$ est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal d'autre part au nombre des zéros distincts de la fonction fuchsienne $F(z) - a$, c'est à dire au nombre des points réellement distincts pour lesquels $F(z)$ prend la valeur $a$. En conséquence, le nombre des points intérieurs à $R_0$ (ou à $R_0 + R'_0$) et pour lesquels $F(z)$ reprend une même valeur est *constant* et *fini*.

3° Soient deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ correspondant à un même groupe fuchsien $G$, et supposé que la première reprenne $p$ fois et la seconde $p_1$ fois la même valeur à l'intérieur de $R_0$, je dis qu'il y aura entre $F$ et $F_1$ une relation algébrique. En effet à chaque valeur de $F$ correspondent $p_1$ valeurs de $F_1$; toute fonction symétrique de ces $p_1$ valeurs est méromorphe en $F$ pour toutes les valeurs de $F$ finies ou infinies. Toutes ces fonctions symétriques sont donc des fonctions rationnelles de $F$; donc $F_1$ elle-même est fonction algébrique de $F$.

C. Q. F. D.

4° Considérons maintenant toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe $G$. Entre deux quelconques d'entre elles nous venons de voir qu'il y a une relation algébrique. Il suit de là que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai $x$ et $y$. Nous aurons d'ailleurs entre $x$ et $y$ une relation algébrique

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

quel est le genre de la relation (1) ou ce qui revient au même celui de la surface de Riemann correspondante? Pour résoudre cette question, il faut se reporter au § 7 du mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe

intitulé *Classification en genres;* dans ce paragraphe, je supposais que l'on découpait la région $R_0$ (ou $R_0 + R'_0$) puis qu'on la repliait en la déformant de manière à recoller ensemble les côtés conjugués et à obtenir ainsi une surface fermée. Il est clair qu'au point de vue de la géométrie de situation la surface fermée ainsi obtenue ne diffère pas de la surface de Riemann qui nous occupe. Il en résulte que le genre de la relation (1) et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide d'*une seule* d'entre elles que j'appellerai $x$.

On peut éviter ces considérations empruntées à la géométrie de situation. C'est ce que j'ai fait dans un travail inséré dans les mémoires de l'Académie de Caen où je détermine le genre de la relation (1) par le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique $(x, y)$, mais on est conduit ainsi à une discussion assez longue.

5° Considérons la fonction fuchsienne que nous venons d'appeler $x$ et formons les deux fonctions suivantes:

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}} \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}. \tag{2}$$

Il est clair que l'on aura:

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{dx^2} = \frac{4\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}.$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de $z$; c'est donc, d'après ce que nous venons de voir, une fonction rationnelle de $x$ et de $y$, que j'appellerai $\varphi(x, y)$.

Les deux intégrales de l'équation linéaire:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y) \tag{3}$$

sont donc:

$$v = v_1 \qquad v = v_2$$

Ainsi la considération de la fonction fuchsienne $x$ permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du point analytique $(x, y)$. On voit que la variable indépendante $x$

s'exprime par une fonction fuchsienne de $z$, c'est à dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne on en déduit les intégrales elles-mêmes à l'aide des formules (2).

Dans le cas particulier où le groupe $G$ est de genre 0, l'équation (3) pourra s'écrire:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x) \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle de $x$ seulement; dans ce cas en effet, nous venons de voir que toute fonction fuchsienne s'exprime rationnellement en $x$.

Cherchons maintenant quels sont les points singuliers de l'équation (3) et comment se comportent les intégrales dans le voisinage de chacun d'eux. En général, les intégrales seront des fonctions holomorphes de $x$; il y aura deux exceptions qui nous donnent deux sortes de points singuliers.

1° pour les points singuliers de la relation (1), $y$ cesse d'être fonction holomorphe de $x$, et il en est de même des intégrales $v_1$ et $v_2$; mais $v_1$ et $v_2$ restent *fonctions holomorphes du point* analytique $(x, y)$. Nous n'avons donc pas ainsi un véritable point singulier.

2° pour les points $(x, y)$ qui correspondent aux divers sommets du polygone $R_0$. Dans cette seconde espèce de points singuliers, nous distinguerons 1° ceux qui correspondent à des sommets de la 1ère catégorie. Dans le voisinage d'un pareil point singulier, les intégrales de l'équation (3) sont régulières, pour employer l'expression de M. Fuchs. Si nous formons maintenant l'équation déterminante correspondant à ce point singulier, la différence des racines de cette équation est l'inverse d'un nombre entier. En effet le point singulier correspond à un sommet de $R_0$ qui fait partie d'un cycle de la 1ère catégorie et la somme des angles de ce cycle est égal à $\frac{2\pi}{p}$, $p$ étant un nombre entier; on voit aisément que la différence des racines de l'équation déterminante est précisément $\frac{1}{p}$.

Dans le cas particulier où le sommet de $R_0$ envisagé appartient à un cycle de la 1ère sous-catégorie, on a $p = 1$, d'après la définition même de cette sous-catégorie. Par conséquent la différence des racines de l'équa-

tion déterminante est l'unité. Un semblable point n'est donc pas un point singulier.

2° Considérons maintenant un point singulier qui corresponde à un sommet de $R_0$ appartenant à un cycle de la 2[de] catégorie. Ce cycle sera de la 3[me] sous-catégorie, puisque, d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de cycle de la 4[me] sous-catégorie. Formons l'équation déterminante correspondant à un pareil point singulier; les racines de cette équation seront égales et les intégrales de l'équation (3) seront *logarithmiques* mais *régulières.*

3° Il faudrait envisager enfin les points analytiques $(x, y)$ qui correspondent à des sommets de la 3[me] catégorie, mais on reconnaîtrait aisément que ce ne sont pas des points singuliers.

En résumé les intégrales de l'équation (3) sont partout régulières et (si on laisse de côté les points singuliers de la relation (1)) le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (3) est égal à celui des cycles de la 2[me] ou de la 3[me] sous-catégories que présente le polygone $R_0$ (ou les deux polygones $R_0$ et $R'_0$).

## § 5. *1[ère] famille; genre 0.*

Après avoir étudié les propriétés des fonctions fuchsiennes en général, nous allons nous occuper séparément des diverses familles et des divers genres entre lesquels se répartissent ces fonctions; nous commencerons par l'étude spéciale des fonctions les plus simples; celles de la 1[ère] famille et du genre 0.

Je rappelle d'abord quelle est pour de semblables fonctions la forme du polygone $R_0$. Les côtés sont tous de la première sorte et au nombre de $2n$; les côtés de rang $p$ et $2n+1-p$ sont conjugués et par conséquent congruents. Les cycles sont au nombre de $n+1$; deux d'entre eux ne contiennent qu'un seul sommet, le premier le sommet de rang 1; le second le sommet de rang $n+1$. Les $n-1$ autres cycles sont formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang $p$ et $2n+2-p$. (C'est l'exemple II du § 7 du mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Un cas particulier remarquable est celui où le polygone $R_0$ est symétrique par rapport à l'arc de cercle qui coupe orthogonalement le

cercle fondamental et qui joint les sommets de rang 1 et $n + 1$. Je dirai alors simplement que ce polygone et symétrique.

Dans le cas qui nous occupe, le genre est égal à 0 et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai $x$ ou bien $f(z)$. Cette condition ne détermine pas complètement la fonction $x = f(z)$. Si en effet toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de $x$, elles s'expriment aussi rationnellement à l'aide de $\frac{ax + b}{cx + d}$, $a$, $b$, $c$, $d$ étant des constantes quelconques. Il faut donc pour définir complètement la fonction $x = f(z)$ s'imposer encore trois conditions. Voici celles que nous choisirons. Soient $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_{n+1}$ les sommets de rang 1, 2 et $n + 1$; nous supposerons que l'on a:

$$f(\alpha_1) = 0 \qquad f(\alpha_2) = 1 \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

La fonction $f(z)$ sera alors entièrement déterminée. A l'égard de cette fonction, je remarquerai ce qui suit. Si le polygone $R_0$ est symétrique, la fonction $f(z)$ est réelle et positive sur tout le périmètre de ce polygone.

J'appellerai $\alpha_i$ le sommet de rang $i$; ce sommet formera avec $\alpha_{2n+2-i}$ un cycle dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{\beta_i}$, $\beta_i$ étant un nombre entier. Enfin je poserai:

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i})$$

d'où

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = \infty.$$

Pour $z = \alpha_i$, les $\beta_i - 1$ premières dérivées de $f(z)$ s'annulent de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme:

$$f(z) = a_i + b_1(z - \alpha_i)^{\beta_i} + b_2(z - \alpha_i)^{\beta_i + 1} + \ldots\ldots$$

Pour $z = \alpha_{n+1}$, $f(z)$ est un infini d'ordre $\beta_{n+1}$ de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme:

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}}} + \frac{b_2}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}+1}} + \ldots\ldots$$

Nous avons vu que si l'on pose:

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction $v$ ainsi définie satisfait à une équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x) \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en $x$. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$. On trouve aisément:

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \ldots\ldots (x-a_n)^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_1)$ $(x - a_2)$ .... $(x - a_n)$ et $P(x)$ étant un polynôme en $x$ de degré $2n - 2$.

Le polynôme $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$P(a_i) = -Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right)$$

Nous désignons par la notation $Q'(x)$ la dérivée de $Q(x)$. De plus le coëfficient de $x^{2n-2}$ dans $P(x)$ doit être égal à

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right)$$

Voilà donc $n + 1$ conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire le polynôme $P(x)$ pour que l'équation (3 bis) soit intégrable de la façon que nous avons dite. Ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet, le polynôme $P(x)$ étant de degré $2n - 2$, il reste dans ce polynôme $n - 2$ paramètres arbitraires; mais dans ces $n - 2$ paramètres qui sont des quantités *complexes,* je dois distinguer les parties réelle et imaginaire de telle façon qu'ils équivalent à $2n - 4$ paramètres *réels.* Or combien avons-nous de paramètres arbitraires dans le groupe $G$. Le groupe $G$ est defini par un polygone $R_0$ de $2n$ côtés. Pour définir un pareil polygone il faut en général $4n - 3$ conditions. Mais notre polygone n'est pas quelconque: en effet les côtés conjugués doivent être congruents ce qui fait $n$ conditions; la somme des angles des divers cycles doit être respectivement égale à $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\ldots \frac{2\pi}{\beta_{n+1}}$ ce qui fait $n + 1$ conditions. Il reste

donc en tout dans notre groupe $G$ $2n - 4$ paramètres arbitraires. Dans notre fonction $\varphi(x)$ au contraire nous avons $2n - 4$ paramètres qui restent arbitraires dans $P(x)$; nous avons en outre dans $Q(x)$ $n - 2$ paramètres complexes arbitraires, à savoir $a_3, a_4, \ldots\ldots a_n$; cela équivant à $2n - 4$ paramètres complexes. Donc dans la fonction $\varphi(x)$ il y a $2n - 4$ paramètres arbitraires de plus que dans le groupe $G$. Donc pour que l'équation (3 bis) s'intègre de la façon que j'ai dite il faut, outre les conditions énoncées plus haut, que $2n - 4$ autres conditions soient remplies. Ces conditions sont transcendantes et très compliquées; leur étude trouvera place dans un autre mémoire.

Supposons maintenant que l'on se donne $a_3, a_4, \ldots\ldots a_n$, c'est à dire les points singuliers de l'équation (3 bis), $Q(x)$ sera déterminé et il nous restera les $2n - 4$ paramètres de $P(x)$. Le nombre des paramètres restés arbitraires est alors précisément le nombre des conditions à remplir. Dans une question où n'entreraient que des fonctions algébriques ou des transcendantes simples, on pourrait conclure de là que l'on peut toujours disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions, et par conséquent qu'*il existe toujours une équation de la forme (3 bis) intégrable par les fonctions fuchsiennes seules et où les points singuliers $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, a_{n+1}$ sont donnés à l'avance.* Mais ici nous ne pouvons nous contenter d'un pareil aperçu et ce théorème, fort important, exigera une démonstration spéciale que je donnerai dans un mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier où le polygone $R_0$ est symétrique, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n+1}$ ainsi que les coëfficients de $P(x)$ sont réels.

Dans le cas plus particulier encore où $n = 2$, l'équation (3 bis) se ramène aisément à l'équation hypergéométrique de Gauss. De plus nous avons $2n - 4 = 0$, de telle sorte que le nombre des conditions transcendantes dont il a été question plus haut est nul. Alors pour que $x$ soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut et il suffit que:

$$P(0) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_1^2}\right)$$

$$P(1) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_2^2}\right)$$

coëfficient de $x^2$ dans $P(x) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_3^2}\right)$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant entiers.

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes.

Soit $\theta(z)$ une fonction thétafuchsienne jouissant de la propriété caractéristique

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

Reprenons la fonction fuchsienne $f(z) = x$ et sa dérivée $f'(z)$, il est clair que la fonction

$$\frac{\theta(z)}{[f'(z)]^m}$$

sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle de $x$. Nous avons donc pour l'expression générale des fonctions $\theta(z)$:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x) \tag{1}$$

$F$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Parmi les fonctions thétafuchsiennes, nous avons vu qu'il y en avait de deux espèces; les unes devenant infinies, les autres ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Quelle sera la forme générale de celles de la 2<sup>de</sup> espèce? L'expression (1) ne doit devenir infinie pour aucune valeur de $x$. Dans ce cas $F(x)$ ne pourra devenir infini que si $\frac{dx}{dz}$ devient nul, c'est à dire si $x$ vient en l'un des points singuliers $x = a_1$, $x = a_2$, .... $x = a_n$.

Il suit de là que l'on doit avoir:

$$\theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\theta_p(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}} \tag{2}$$

$\theta_p(x)$ désignant un polynôme d'ordre $p$. Exprimons maintenant que $\theta(z)$ ne devient infini ni pour $x = a_1$, ni pour $x = a_2$, ...... ni pour $x = a_n$, ni pour $x = \infty$; il viendra:

$$\begin{aligned} &\lambda_i < m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \\ &p < \sum \lambda_i - m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Ces $n+1$ inégalités sont compatibles.

Ces inégalités ne permettent pas de donner à $p$ des valeurs aussi grandes que l'on veut, de sorte qu'il existera toujours un nombre $q$ tel que l'on ait constamment $p < q$ et que les inégalités (3) permettent à $p$ d'atteindre la limite $q - 1$.

Supposons le nombre $m$ donné; le nombre $q$ sera alors déterminé et il est clair qu'entre $q$ fonctions thétafuchsiennes de la $n^e$ espèce, il y aura toujours une relation linéaire identique.

Si l'on se reporte à l'expression que nous avons donnée de ces transcendantes dans le § 1, on verra qu'il y entre une fonction rationnelle $H(z)$ renfermant un nombre infini de paramètres arbitraires. Il suit de là qu'il y a une infinité de fonctions rationnelles $H$, telles que la série thétafuchsienne correspondante soit identiquement nulle.

Il existe donc une infinité de relations identiques linéaires entre ces séries thétafuchsiennes. Nous les étudierons plus loin.

Revenons à l'expression (2). Jusqu'ici nous avons supposé que les nombres $m$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, .... qui y entrent étaient entiers. S'ils ne l'étaient pas, la fonction définie par cette expression ne jouirait plus de la propriété fondamentale des fonctions thétafuchsiennes, mais elle pourrait rester uniforme. Pour cela il suffit que les nombres:

$$m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

et

$$m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i\beta_{n+1}$$

soient entiers.

Il est clair que les $n+1$ équations:

$$(4) \qquad \begin{aligned} m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i &= \varepsilon_i \\ m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i\beta_{n+1} &= \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

où les $\varepsilon$ sont des nombres entiers donnés fourniront toujours des valeurs pour les $\lambda$ et pour $m$, car ce sont des équations linéaires dont le déterminant n'est pas nul.

Supposons donc que dans les équations (4) on donne à tous les $\varepsilon$ la valeur 0 excepté à $\varepsilon_k$ auquel on donne la valeur 1. Portons ensuite

dans l'expression (2) les valeurs de $m$ et des $\lambda$ tirées des équations (4) et remplaçons dans cette même expression $\theta_p$ par une constante. Nous aurons défini une fonction $X_k$ qui est holomorphe dans tout le cercle fondamental, et qui n'a d'autres zéros que le point $a_k$ et les points correspondants. Tous ces zéros sont d'ailleurs simples.

Ces fonctions $X_1$, $X_2$, .... $X_n$, $X_{n+1}$, dont le rôle est très important, ont été découvertes par M. HALPHEN dans le cas particulier de $n = 2$. On peut trouver entre elles et $x$ certaines relations intéressantes. Considérons en effet les séries $X_1$ et $X_{n+1}$. Soient $m_1$ et $m_{n+1}$ les valeurs correspondantes du nombre $m$. Ces valeurs seront fractionnaires.

Soit en effet $Y$ une fonction uniforme quelconque susceptible d'être mise sous la forme

$$(2 \text{ bis}) \qquad Y = \left(\frac{dx}{dz}\right)^M \frac{K}{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \ldots . (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

$K$ désignant un facteur numérique. Cette fonction n'a d'autres zéros ou infinis que les points $a_1$, $a_2$, ... $a_{n+1}$ et leurs correspondants. Supposons que ces zéros soient respectivement d'ordre $\gamma_1$, $\gamma_2$, .... $\gamma_{n+1}$; il va sans dire que si $a_i$ par exemple était un infini $\gamma_i$ serait négatif. On aura:

$$Y = K_1 X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2} \ldots . . X_{n+1}^{\gamma_{n+1}}$$

$K$ étant un facteur numérique. On aura en particulier:

$$x = K_1 X_1^{\beta_1} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

et

$$x - a_i = K_i X_i^{\beta_i} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

les $K$ étant toujours des facteurs numériques: d'où les relations identiques

$$K_1 X_1^{\beta_1} = K_i X_i^{\beta_i} + a_i X_{n+1}^{\beta_{n+1}}.$$

Nous avons exprimé les fonctions thétafuchsiennes de deux manières tout à fait différentes; soit par la série (4) § 1, soit par la formule (1) de ce paragraphe.

Nous savons donc a priori qu'il existe une infinité d'identités de la forme:

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m} = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

où $H$ et $F$ sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles.

Ecrire effectivement ces identités et en particulier reconnaître dans quel cas la fonction $F$ est identiquement nulle, tel est le problème dont il s'agit maintenant de donner une solution aussi complète que possible.

Mais pour y arriver, il est nécessaire d'avoir recours à des considérations d'un ordre un peu différent.

Jusqu'ici nous avons toujours regardé le nombre $m$ comme positif; supposons le maintenant entier, mais négatif. Considérons en particulier la fonction suivante:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{[f(z) - a_1]^{\mu_1}\, [f(z) - a_2]^{\mu_2} \ldots\ldots [f(z) - a_n]^{\mu_n}}{[f(z) - f(z_1)]\, [f(z) - f(z_2)] \ldots\ldots [f(z) - f(z_p)]}$$

Je suppose que $h$ est un entier positif ainsi que les exposants $\mu_1$, $\mu_2$, .... $\mu_n$ et que ces nombres entiers satisfont ainsi que le nombre $p$ des facteurs du dénominateur aux inégalités suivantes:

$$\mu_i > h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)$$

(5)

$$\sum \mu < h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + p.$$

D'après ces inégalités la fonction $\Lambda(z)$ ne peut devenir infinie que si l'un des facteurs du dénominateur s'annule. Il en résulte que les infinis de cette fonction sont tous simples et qu'ils sont compris dans l'une des formules:

(6) $$\frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i},\ \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i},\ \ldots\ldots\ \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}$$

où $$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

représente une des substitutions du groupe $G$.

Posons:

$$F(z) = [f(z) - a_1]^{\mu_1} [f(z) - a_2]^{\mu_2} \ldots\ldots [f(z) - a_n]^{\mu_n}$$

et

$$\frac{1}{[f(z) - f(z_1)]\,[f(z) - f(z_2)] \ldots\ldots [f(z) - f(z_p)]} =$$

$$= \frac{A_1}{f(z) - f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z) - f(z_2)} + \ldots\ldots + \frac{A_p}{f(z) - f(z_p)}$$

de telle sorte que:

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_p = 0\\
&A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \ldots\ldots + A_p f(z_p) = 0\\
(7)\qquad &A_1 f^2(z_1) + A_2 f^2(z_2) + \ldots\ldots + A_p f^2(z_p) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1 f^{p-2}(z_1) + A_2 f^{p-2}(z_2) + \ldots\ldots + A_p f^{p-2}(z_p) = 0\\
&A_1 f^{p-1}(z_1) + A_2 f^{p-1}(z_2) + \ldots\ldots + A_p f^{p-1}(z_p) = 1
\end{aligned}$$

Le résidu correspondant à l'infini:

$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

s'écrira:

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}$$

Il en résulte que l'on aura identiquement:

$$(8)\qquad \Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z)$$

$G(z)$ désignant une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. Plus généralement, si $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de $z$ n'ayant pas d'infini intérieur au cercle fondamental, on aura:

$$(9)\qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_0^{\infty}{}_i \sum_1^{p}{}_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z)$$

Je dis que dans les formules (8) et (9) la fonction holomorphe $G(z)$ est identiquement nulle.

### Première démonstration.

Considérons un cercle $C$ ayant pour centre l'origine et pour rayon $r$; concentrique par conséquent au cercle fondamental.

Envisageons les différents polygones $R_i$ qui sont tout entiers ou en partie à l'intérieur de ce cercle.

L'ensemble de ces polygones formera une figure polygonale $S$ ne dépendant que du rayon $r$ du cercle $C$. Considérons l'intégrale:

$$\int \frac{A(z)\varphi(z)dz}{z - x}$$

prise le long du contour de cette figure $S$. Le théorême que j'ai énoncé pourra être regardé comme démontré si j'établis que cette intégrale tend vers 0 quand $r$ tend vers 1, c'est à dire vers le rayon du cercle fondamental.

Pour cela je vais faire voir:

1° que le périmètre de $S$ reste fini, quel que soit $r$.

2° que le module de la fonction sous le signe $\int$ reste plus petit qu'une certaine quantité $M$ quand la variable reste sur le contour d'intégration.

3° que $M$ tend vers 0 quand $r$ tend vers 1.

En vertu du lemme IV du § 1, le nombre des polygones $R_i$ qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle $G$ est plus petit que:

$$N = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R+\lambda)} + e^{-2(R+\lambda)} - 2)$$

$\sigma$ et $\lambda$ étant des quantités constantes et $R$ étant défini par l'égalité:

$$r = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}$$

Donc a fortiori, le nombre des côtés de $S$ sera plus petit que $2nN$. Considérons l'un de ces côtés appartenant à un polygone $R_i$ et soit $l_i$ la

longueur de ce côté; $l_0$ celle du côté correspondant de $R_0$; soit enfin $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ celle des substitutions de $G$ qui correspond à $R_i$, on aura:

$$l_i < l_0 . H$$

$H$ étant la plus grand valeur que puisse prendre

$$\text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

quand la variable $z$ décrit le côté $l_0$.

Supposons que le polygone $R_0$ soit tout entier contenu dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1}.$$

En vertu du lemme V du § 1 on aura;

$$H < \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R} + e^{-2R} + 2}$$

Soit $L$ le plus grand côté de $R_0$. Le périmètre de $S$ sera plus petit que:

$$2nN . H . L$$

ou a fortiori que:

$$\frac{2n\pi L}{\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)\frac{2e^{2(R+\lambda)}}{e^{2R}}$$

Il sera donc fini. C. Q. F. D.

Nous devons évidemment supposer que $x$ ne se trouve sur aucun des contours d'intégration. La fonction $\frac{\varphi(z)}{z - x}$ est alors une fonction rationnelle bien déterminée et ne devenant infinie pour aucune des valeurs de la variable situées sur les divers contours d'intégration. On peut donc aisément trouver une limite supérieure $M_1$ que son module ne peut dépasser.

Nous pourrons supposer aussi que la fonction $\Lambda(z)$ ne devient pas infinie le long du périmètre de $R_0$ et nous pourrons trouver une limite

supérieure $M_2$ que son module ne peut dépasser quand $z$ décrit le contour de $R_0$. Mais on aura identiquement:

$$\Lambda\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Lambda(z)\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h}}$$

On en conclut que quand $z$ décrit le contour de $S$ le module de $\Lambda(z)$ est plus petit que:

$$M_2 H^{2h}$$

et celui de la fonction sous le signe $\int$ plus petit que:

$$M = M_1 M_2 H^{2h}$$

D'ailleurs quand $r$ tend vers 1, $M$ tend vers 0, puisque $M_1$ et $M_2$ sont des constantes et que $H$ tend vers 0.

Le théorème énoncé est donc démontré.

### Deuxième Démonstration.

Posons:

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Si dans cette expression on regarde $z$ comme une constante, $\Phi(z, a)$ sera une fonction thétafuchsienne de $a$. Supposons d'abord que $z$ et $a$ soient tous deux intérieurs au cercle fondamental; cette fonction thétafuchsienne ne deviendra infinie que pour $a = z$ et pour les points correspondants, c'est à dire pour $f(a) = f(z)$. Le résidu correspondant à l'infini $z = a$ sera égal à $-\varphi(z)$. On aura donc:

$$\Phi(z, a) = \frac{[f'(a)]^{h+1}}{f(z) - f(a)} \frac{\theta_q[f(a)]}{F_1(a)} \frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)]\,[f'(z)]^h} \tag{10}$$

Dans cette expression (10) $F_1(a)$ désigne le produit suivant:

$$[f(a) - a_1]^{\lambda_1}[f(a) - a_2]^{\lambda_2} \ldots\ldots\ldots [f(a) - a_n]^{\lambda_n}$$

$\theta_q[f(a)]$ désigne un polynôme entier de degré $q$ en $f(a)$ dont les coëfficients peuvent être des fonctions de $z$.

Enfin les nombres $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ et $q$ doivent satisfaire aux inégalités (3)

$$(11) \qquad \begin{aligned} \lambda_i &< (h+1)\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \\ q &< \sum \lambda - (h+1)\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1 \end{aligned}$$

On voit aisément en effet que telle doit être la forme de toute fonction thétafuchsienne de $a$ n'admettant aucun infini distinct de l'infini $a = z$.

En comparant les inégalités (3) et (11) on trouve:

$$\lambda_i \leqq \mu_i \qquad\qquad q < p$$

Je me propose maintenant d'établir l'égalité (9) en montrant que $G(z)$ est identiquement nul, c'est à dire de démontrer l'identité:

$$\varphi(z).I(z) = \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k)$$

ou bien:

$$\varphi(z).I(z) = \sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{F(z_k)}{F_1(z_k)} \theta_q[f(z_k)] \frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)]\,[f'(z)]^h}$$

Nous pouvons simplifier le second membre en supposant que l'on a:

$$\lambda_i = \mu_i$$

Si cela n'avait pas lieu, on multiplierait $F_1(a)$ et $\theta_q[f(a)]$ par

$$[f(a) - a_1]^{\mu_1 - \lambda_1}[f(a) - a_2]^{\mu_2 - \lambda_2} \ldots\ldots\ldots [f(a) - a_n]^{\mu_n - \lambda_n}$$

Le degré du polynôme $\theta_q[f(a)]$ serait alors augmenté, mais il resterait inférieur à $p$.

On peut donc toujours supposer

$$\lambda_i = \mu_i \quad \text{et par conséquent} \quad F(z) = F_1(z)$$

tout en continuant à supposer

$$p > q$$

L'identité à démontrer se simplifie alors et s'écrit:

$$\sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)}\frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h} = \sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)}\frac{\theta_q[f(z_k)]}{\theta_q[f(z)]}\frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h}$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{\theta_q[f(z_k)]-\theta_q[f(z)]}{f(z)-f(z_k)} = P[f(z_k)]$$

$P$ représentera un polynôme en $f(z_k)$ dont le degré sera égal à $q-1$ et ne pourra par conséquent surpasser $p-2$. L'identité à démontrer se réduit alors:

$$\sum A_k P[f(z_k)] = 0$$

et sous cette forme elle est évidente en vertu des relations (7). Le théorème énoncé est donc encore démontré.

Cette seconde démonstration nous conduit tout naturellement à un théorème important relatif aux fonctions thétafuchsiennes de 2de espèce. Soit

(12) $$\sum H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2(h+1)}$$

une série où $H$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. On a vu que cette série représente une fonction thétafuchsienne sans infini et peut être égalée à une expression de la forme:

(13) $$[f'(z)]^{h+1}\frac{\theta_{q-1}[f(z)]}{F(z)}$$

$\theta_{q-1}$ étant un polynôme de degré $q-1$ en $f(z)$ et $q$ étant le plus grand nombre entier satisfaisant aux inégalités (11).

Toute expression telle que (13) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q$ d'entre elles; donc toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q$ d'entre elles. Mais on peut faire deux hypothèses.

Ou bien toute expression telle que (13) peutêtre mise sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) ne peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Ou bien il n'est pas possible de mettre toute expression (13) sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Cette deuxième hypothèse doit être rejetée.

Supposons la en effet satisfaite et soient:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_{q-1}$$

les $q-1$ fonctions telles que (12) à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots\ldots z_q$$

$q$ valeurs quelconques de $z$. On pourra toujours trouver $q$ nombres

$$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_q$$

satisfaisant aux conditions:

$$A_1\theta_1(z_1) + A_2\theta_1(z_2) + \ldots\ldots + A_q\theta_1(z_q) = 0$$
$$A_1\theta_2(z_1) + A_2\theta_2(z_2) + \ldots\ldots + A_q\theta_2(z_q) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1\theta_{q-1}(z_1) + A_2\theta_{q-1}(z_2) + \ldots\ldots + A_q\theta_{q-1}(z_q) = 0$$

On aura alors quelle que soit la fonction $H$ qui entre dans l'expression (12)

$$(14) \qquad \sum_k\sum_i A_k H\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)} = 0$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe $G$; on démontre aisément l'identité suivante en reprenant la fonction $\Phi(z, z_k)$ définie plus haut et y faisant $\varphi(z) = 1$

$$(15) \qquad \Phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, z_k\right) - (\gamma z + \delta)^{-2h}\Phi(z, z_k) =$$

$$= \sum_i (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2h-2} \frac{\left[\dfrac{(\gamma z + \delta)^{2h+1} - \left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right) + \delta\right]^{2h+1}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}\right]}{(\gamma z + \delta)^{2h}\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right) + \delta\right]^{2h+1}} =$$

$$= \sum_i (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2h-2} H\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)$$

$H(z)$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental.

Posons maintenant:

$$A(z) = \sum_k A_k \Phi(z, z_k)$$

Des formules (14) et (15) nous déduisons:

$$A\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) - (\gamma z + \delta)^{-2h} A(z) = 0$$

Comme cela a lieu quelle que soit la substitution $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ que l'on ait choisie dans le groupe $G$, il faudrait que l'on eût:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$$

$F(x)$ étant rationnel en $x$.

Mais $A(z)$ n'aurait que $q$ infinis distincts, $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$. Or il est aisé de voir qu'une fonction de la forme $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$ doit toujours avoir plus de $q$ infinis distincts.

Donc l'hypothèse faite au début est absurde.

Donc toute expression de la forme (13) peut toujours être mise sous la forme (12).

Donc toute fonction de la forme (1) peut toujours être exprimée par une série de la forme (4) paragraphe 1 pourvu que $m > 1$.

Comment maintenant, étant donnée une série de la forme (4) § 1, pourrons nous la mettre effectivement sous la forme (1).

On donne une série $\theta(z)$ de la forme (4) et il s'agit de la mettre sous la forme:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

Nous connaissons d'abord les infinis de $\theta(z)$ et les résidus correspondants; mais cela ne suffit pas pour déterminer complètement $F(z)$; il reste dans cette fonction rationnelle un certain nombre de coefficients indéterminés. On peut d'abord calculer un nombre suffisant de valeurs de la

série $\theta(z)$ pour avoir des équations qui permettent de déterminer ces coëfficients. Il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Considérons la fonction

$$\theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m} = F(x)$$

Elle devient infinie, non seulement quand $\theta(z)$ est infinie, mais quand $\frac{dx}{dz}$ est nul, c'est à dire pour:

$$z = a_1, \; z = a_2, \; \ldots\ldots \; z = a_n.$$

On développera alors la série $\theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m}$ suivant les puissances croissantes de $z - \alpha_i$ et on calculera les coëfficients de toutes les puissances négatives. Quand ces coëfficients seront connus, ainsi que les premiers coëfficients du développement de $x$ suivant les puissances de $z - \alpha_i$, la fonction $F(x)$ sera aussi connue.

Mais pour trouver ces coëfficients eux-mêmes, il faut calculer un certain nombre de valeurs de la série $\theta(z)$ et de séries analogues. Il est pourtant des cas où cette difficulté peut être évitée.

Reprenons la fonction

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{F(z)}{[f(z) - f(z_1)]\,[f(z) - f(z_2)] \ldots\ldots [f(z) - f(z_p)]}$$

que nous avons étudiée plus haut; nous avons démontré l'identité suivante:

$$(8) \qquad A(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}$$

Différentions cette identité $2h + 1$ fois par rapport à $z$; il viendra:

$$(16) \qquad \frac{1}{(2h+1)!} \frac{d^{2h+1} A}{dz^{2h+1}} = -\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}$$

le second membre peut s'écrire:

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z - \alpha_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \dfrac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)^{2(h+1)}}$$

Remarquons que si dans le groupe $G$, nous avons la substitution $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, nous aurons également la substitution inverse $\left(z, \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)$. C'est à dire que l'expression précédente peut s'écrire:

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}$$

Le second membre de l'identité (16) est donc une série de la forme (4) § 1; il reste à mettre le premier membre sous la forme (1). C'est là un calcul qui ne présente pas de difficultés. J'en indique le résultat dans le cas de $h = 1$ et dans celui de $h = 2$. Soit

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} A_0(x)$$

et soient $A_1$, $A_2$, etc. les dérivées successives de $A_0$ par rapport à $x$. Reprenons maintenant l'équation:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x) \tag{3 bis}$$

et soient $\varphi_1$, $\varphi_2$, etc. les dérivées successives de $\varphi$ par rapport à $x$. On aura dans le cas de $h = 1$

$$\frac{d^3 A}{dz^3} = (A_3 - 2A_0\varphi_1 - 4A_1\varphi)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \tag{17}$$

et dans le cas de $h = 2$

$$\frac{d^5 A}{dz^5} = (A_5 - 20A_3\varphi - 30A_2\varphi_1 - 18A_1\varphi_2 - 4A_0\varphi_3 + 64A_1\varphi^2 + 64A_0\varphi\varphi_1)\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \tag{18}$$

On peut trouver une infinité de relations analogues à la relation (16) par divers procédés; par exemple en différentiant cette relation par rapport aux divers paramètres $z_1$, $z_2$, .... $z_p$.

Je vais maintenant poser un dernier problème que je ne résoudrai que partiellement.

Considérons la série (4) § 1

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

elle dépend de la fonction rationnelle $H$ et je la représenterai pour cette raison par la notation:

$$\theta[z, H]$$

*Comment faut-il choisir la fonction rationnelle $H$ pour que $\theta$ soit identiquement nul?*

La solution complète de ce problème serait sans doute très compliquée; mais on peut s'aider dans chaque cas particulier des considérations suivantes:

1° Si l'on a identiquement

$$\theta(z, H_1) = \theta(z, H_2) = 0$$

on aura également:

$$\theta(z, H_1 + H_2) = 0$$

2° Si la fonction rationnelle $H$ peut se développer en une série convergente de la forme suivante:

$$\text{(S)} \qquad k_1 H_1 + k_2 H_2 + \ldots\ldots + k_n H_n + \ldots.$$

où $k_1, k_2, \ldots k_n$ sont des coëfficients constants et où $H_1, H_2, \ldots H_n$ sont des fonctions rationnelles telles que:

$$\theta(z, H_n) = 0$$

Si la série (S) est convergente toutes les fois que $z$ est intérieur au cercle fondamental, on aura identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

3° Si l'on a identiquement:

$$\theta(z, H) = 0$$

et si, $\left(z, \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ désignant une des substitutions de $G$, on pose:

$$H_1(z) = H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

on aura identiquement:

$$\theta(z,\ H_1) = 0$$

En effet posons pour abréger:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z) \qquad \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = f_1(z) \qquad \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} = f_1^{-1}(z)$$

la série (4) pourra s'émettre sous la forme:

$$\theta(z,\ H) = \sum H\left[f_1\left[f_i[f_1^{-1}(z)]\right]\right]\left[\frac{df_1\left[f_i[f_1^{-1}(z)]\right]}{dz}\right]^m$$

Remplaçons maintenant $z$ par $f_1(z)$ dans l'équation identique

$$\theta(z,\ H) = 0$$

il viendra:

$$0 = \sum H\left[f_1[f_i(z)]\right]\left[\frac{df_1[f_i(z)]}{df_i(z)}\right]^m\left[\frac{df_i}{dz}\right]^m\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m = \theta(z,\ H_1)\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m$$

ce qui démontre l'identité annoncée.

4° Soit, pour reprendre les notations employées au début de ce chapitre, $\alpha_r$ l'un des sommets du polygone $R_0$, $\alpha'_r$ son symétrique par rapport au cercle fondamental. Une des substitutions de $G$ s'écrira:

$$\left(\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r},\ e^{\frac{2i\pi}{\beta_r}}\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r}\right)$$

$\beta_r$ étant un nombre entier connu. Si nous posons:

$$H(z) = \left(\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r}\right)^p \frac{1}{(z - \alpha'_r)^{2m}}$$

on aura identiquement:

$$\theta(z,\ H) = 0$$

à moins que:

$$p + m \equiv 0 \qquad \text{mod. } \beta_r$$

En effet considérons les diverses substitutions $(z,\ f_i)$ du groupe $G$, on peut en choisir une infinité

$$(z,\ \varphi_0),\ (z,\ \varphi_1),\ (z,\ \varphi_2),\ \ldots.\ (z,\ \varphi_n)\ \ldots$$

et de telle sorte que chacune des fonctions $f_i(z)$ puisse être définie d'une manière et d'une seule par une relation de la forme suivante

$$\frac{f_i - a_r}{f_i - a'_r} = e^{\frac{2hi\pi}{\beta_r}} \frac{\varphi_k - a_r}{\varphi_k - a'_r}$$

$h$ étant un entier égal ou inférieur à $\beta_r$. On aura alors:

$$\Theta(z, H) = \sum_i \frac{(f_i - a_r)^p}{(f_i - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{df_i}{dz}\right)^m$$

ou

$$\Theta(z, H) = \sum_{0}^{\infty}{}_k \sum_{1}^{\beta_r}{}_h \frac{(\varphi_k - a_r)^p}{(\varphi_k - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{d\varphi_k}{dz}\right)^m e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}}$$

Or si l'on n'a pas

$$p + m \equiv 0 \qquad \text{mod. } \beta_r$$

on aura:

$$\sum_{1}^{\beta_r}{}_h e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}} = 0$$

On aura donc

$$\Theta(z, H) = 0$$

C. Q. F. D.

5° Reprenons l'identité

(9) $$\varphi(z)\Delta(z) = \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k)$$

ou

$$\Phi(z, z_k) = \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Faisons y successivement

$$\varphi(z) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z - b}$$

$b$ étant une quantité constante extérieure au cercle fondamental, nous obtiendrons deux identités de la forme (9).

Multiplions la première par $\frac{1}{z-b}$ et retranchons en la seconde; il viendra:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Psi(b, z_k) = 0 \tag{19}$$

en posant:

$$\Psi(b, a) = \sum_i \frac{1}{b - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Posons encore

$$\Theta(b, a) = -\frac{d^{2h+1}\Psi}{db^{2h+1}} \frac{1}{(2h+1)!}$$

il viendra, en différentiant $2h+1$ fois la relation (19) par rapport à $b$:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta(b, z_k) = 0 \tag{20}$$

Or $\Theta(b, z_k)$ est une fonction thétafuchsienne de $b$. Le premier membre de l'identité (20) est donc une série de la forme (4) § 1. Nous obtenons donc ainsi une série de cette forme qui est identiquement nulle quand $b$, qui est ici la variable indépendante, reste *extérieure* au cercle fondamental.

Mais ce que nous cherchons, c'est une série de la forme (4) qui reste identiquement nulle quand la variable indépendante reste *intérieure* au cercle fondamental. Heureusement il est facile de passer d'un cas à l'autre. Posons en effet

$$b = \frac{1}{z}$$

On aura:

$$\frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} = \frac{1}{\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}}$$

$\alpha'_i$, $\beta'_i$, $\gamma'_i$, $\delta'_i$ désignant les quantités imaginaires conjugées de $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$; de sorte que les substitutions $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ forment un groupe $G'$ conjugué de $G$.

De même en posant:

$$b_i = \frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} \qquad\qquad z_i = \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$$

on aura:

$$\frac{db_i}{db} = \frac{z^2}{z_i^2}\frac{dz_i}{dz}$$

Nous aurons donc:

$$\theta(b, a) = \sum_i \frac{1}{(b_i - a)^{2h+2}}\left(\frac{db_i}{db}\right)^{h+1} = \sum_i \frac{z^{2h+2}}{(1 - az_i)^{2h+2}}\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}$$

ou enfin

$$\theta(b, a) = z^{2h+2}\theta'(z, a)$$

en posant

$$\theta'(z, a) = \sum_i \frac{1}{(1 - az_i)^{2h+2}}\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}$$

Nous arrivons à l'identité suivante:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\theta'(z, z_k) = 0$$

Les fonctions $\theta'$ sont des fonctions thétafuchsiennes de $z$, de sorte que nous avons bien une identité de la forme cherchée. Mais le groupe des fonctions $\theta'$ n'est pas le groupe $G$, mais le groupe conjugué $G'$. Passons donc du groupe $G'$ au groupe $G$ en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il viendra:

$$\sum_k \left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right]' \theta'_1(z, z'_k) = 0$$

Dans cette formule $\left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right]'$ et $z'_k$ désignent les quantités imaginaires conjuguées de $\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}$ et de $z_k$ et l'on a posé:

$$\theta'_1(z, a) = \sum \frac{1}{\left(1 - a\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2h+2}} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h+2}}$$

de sorte que si nous posons:

$$H(z) = \sum_k \left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right]' \frac{1}{(1 - z'_k z)^{2h+2}}$$

nous aurons identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

tant que $z$ restera intérieur au cercle fondamental.

6° Supposons que l'on ait identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

et que $H$ dépende d'un paramètre arbitraire $\lambda$; on aura également:

$$\theta\left(z, \frac{dH}{d\lambda}\right) = 0$$

En combinant de diverses manières les six principes qui précèdent on obtiendra une infinité de relations de la forme:

$$\theta(z, H) = 0$$

## § 6. *1ère famille; genre quelconque.*

Nous nous sommes étendus sur les fonctions de la 1ère famille et du genre 0 parce qu'elles sont les plus simples de toutes et parce que les principes généraux, une fois démontrés dans ce cas particulier, s'étendent sans trop de peine aux fonctions de toutes les familles et de tous les genres. Nous insisterons moins sur les autres fonctions fuchsiennes et nous nous bornerons à faire connaître les particularités les plus remarquables qui les concernent.

Lorsque le polygone $R_0$, tout en restant de la 1ère famille, n'est pas de la forme simple étudiée dans le paragraphe précédent, ou n'est pas susceptible d'y être ramené, les fonctions fuchsiennes correspondantes sont de la 1ère famille et de genre plus grand que 0.

Commençons par un exemple simple. Soit un polygone $R_0$ de $4n$ côtés et tel que les côtés opposés soient conjugués. Tous les sommets forment alors un seul cycle, de sorte que la somme de tous les angles

du polygone $R_0$ est une partie aliquote de $2\pi$. Supposons d'abord qu'elle soit précisément égale à $2\pi$. On pourra alors exprimer toutes les fonctions fuchsiennes dérivées du polygone $R_0$ à l'aide de deux d'entre elles que nous appellerons $x$ et $y$, et entre lesquelles il y a une relation algébrique:

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

qui est de genre $n$.

Reprenons l'équation (3) du § 4. Elle s'écrit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

et l'on a identiquement:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x'')^2}{(x')^4}$$

en désignant par $x'$, $x''$, $x'''$, les dérivées successives de $x$ par rapport à $z$.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(x, y)$? Pour simplifier, je vais supposer que la fonction $y$ de $x$ définie par l'équation (1) ne présente que des points singuliers de la nature la plus simple; c'est à dire que toutes les fois que l'on a:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0$$

on a, ou bien:

$$\frac{d\psi}{dx} \gtrless 0 \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

(ce qui correspond pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$ à une tangente parallèle à l'axe de $y$ et n'ayant avec la courbe qu'un contact du 1[er] ordre) ou bien:

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \qquad \left(\frac{d^2\psi}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0 \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

(ce qui correspond pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$ à un point double ordinaire).

Nous supposerons en outre que si l'équation (1.) est d'ordre $r$, on a pour $x$ infini, $r$ valeurs finies et distinctes du rapport $\frac{y}{x}$ (ce qui correspond pour la courbe $\psi(x, y) = 0$ à $r$ directions asymptotiques distinctes).

Ces hypothèses ne restreignent pas la généralité; en effet on peut, parmi les fonctions fuchsiennes correspondant au groupe $G$, choisir d'une infinité de manières les fonctions $x$ et $y$ de telle sorte que toutes les autres s'expriment rationnellement en $x$ et $y$ et ce choix peut toujours se faire de façon à satisfaire aux hypothèses précédentes.

Reprenons maintenant notre fonction $\varphi(x, y)$. Il est clair que pour les valeurs infinies de $x$, elle reste finie; qu'elle est finie également toutes les fois que $x'$ n'est pas nul. Or $x'$ ne peut s'annuler que si l'on a à la fois

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \qquad\qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0$$

Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ sont donc les points singuliers de l'équation (1) en n'y comprenant que les points singuliers ordinaires et non les points doubles de la courbe (1).

Considérons l'un de ces infinis, et soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les valeurs correspondantes de $x$, de $y$ et de $z$. On voit aisément que le développement de $x - \alpha$ commence par un terme en $(z - \gamma)^2$, celui de $y - \beta$ par un terme en $z - \gamma$ et on en conclut que l'on a:

$$\lim. (y - \beta)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad\qquad (\text{pour } x = \alpha,\ y = \beta)$$

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer complètement la fonction $\varphi(x, y)$. Celle-ci est assujettie en outre à un certain nombre de conditions transcendantes dont l'étude approfondie fera l'objet d'un mémoire ultérieur. Nous démontrerons de plus, dans un autre mémoire, que si ces conditions ne sont pas remplies, mais si les coëfficients de $\varphi(x, y)$ satisfont à certaines inégalités, $x$ n'est plus, il est vrai, fonction fuchsienne de $z$, mais en est encore fonction uniforme (Kleinéenne).

De combien de paramètres distincts dépend notre groupe $G$?

Pour définir un polygone de $4n$ côtés, il faut $8n - 3$ conditions; mais notre polygone $R_0$ n'est pas arbitraire. Il est assujetti à $2n + 1$,

conditions, à savoir que les côtés opposés soient congruents et que la somme des angles soit égale à $2\pi$. Il reste donc $6n - 4$ paramètres arbitraires. Mais on a vu, au § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, qu'un même groupe $G$ pouvait être considéré comme dérivé d'une infinité de polygones différents et, en effet, dans le cas qui nous occupe, on peut remplacer le polygone $R_0$ par un autre $R'_0$ ayant ses côtés en même nombre et disposés de la même manière, mais ayant pour sommet un point quelconque du plan; de sorte qu'à un même groupe $G$ correspond une double infinité de polygones $R_0$ et que le nombre des paramètres de $G$ est de deux unités inférieur à celui des paramètres de $R_0$. *Le groupe $G$ dépend donc de $6n - 6$ paramètres.*

De combien de paramètres dépend la relation (1)? Bien entendu, je ne considère pas comme distinctes deux relations:

$$\psi(x, y) = 0 \qquad \psi_1(\xi, \eta) = 0$$

si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation uniforme, c'est à dire en remplaçant $\xi$ et $\eta$ par des fonctions rationnelles de $x$ et de $y$. La théorie des fonctions abéliennes nous apprend que ces paramètres sont, pour une relation du genre $n$, au nombre de $3n - 3$. Mais il s'agit de $3n - 3$ paramètres *complexes* qui correspondent à $6n - 6$ paramètres *réels;* c'est à dire que le nombre des paramètres dont dépend la relation (1) est précisément le même que celui des paramètres du groupe $G$. S'en suit-il que l'on puisse disposer des paramètres du groupe $G$ de telle sorte que l'on ait entre $x$ et $y$ telle relation algébrique que l'on veut? C'est ce que nous démontrerons dans un mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier de $n = 1$, nous n'avons plus affaire à des fonctions fuchsiennes proprement dites. En effet, dans les polygones curvilignes $R_0$ dont tous les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental, la somme des angles est toujours plus petite que celle d'un polygone rectiligne d'un même nombre de côtés. Pour un quadrilatère, la somme des angles devrait être plus petite que $2\pi$. Mais ici nous avons supposé que la somme des angles de notre polygone curviligne de $4n$ côtés était précisément $2\pi$. Si l'on veut faire $n = 1$, le polygone $R_0$ devra devenir rectiligne, le rayon du cercle fondamental deviendra infini et le quadrilatère $R_0$ se réduira à un simple parallélogramme rectiligne; le groupe $G$ se réduira alors à des substitutions de la

forme $(z, z + \alpha)$ et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent se réduiront à des fonctions doublement périodiques. C'est dans ce sens que l'on peut dire que les fonctions elliptiques sont des cas particuliers des fonctions fuchsiennes.

Supposons donc $n > 1$. Le polygone $R_0$ peut présenter différentes formes de symétrie. Il peut d'abord être symétrique par rapport à un cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental; dans ce cas, les coëfficients des fonctions $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont réels. Supposons maintenant qu'il soit symétrique par rapport à un point, ou qu'il puisse être ramené, soit par un changement convenable de la variable $z$, soit par l'application de la règle du § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, à être symétrique par rapport à un point: dans ce cas la relation (1) se ramène à la relation hyperelliptique:

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2n})$$

Mais la réciproque n'est pas vraie.

Considérons maintenant une intégrale abélienne de 1ère espèce:

$$\int g(x, y)dx \tag{4}$$

et remplaçons $x$ et $y$ par leurs valeurs en $z$; il viendra:

$$\int g(x, y)dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(z)$$

$g(z)$ désignant une fonction fuchsienne de $z$ et $G(z)$ une fonction uniforme de $z$, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et cessant d'exister à l'extérieur de ce cercle.

Soit $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ une des substitutions du groupe fuchsien; on aura identiquement:

$$G\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = G(z) + K_i$$

$K_i$ étant l'une des périodes de l'intégrale abélienne. Ainsi à chaque substitution de notre groupe correspond une des périodes de l'intégrale (4).

Mais on peut se placer à un autre point de vue. Soit $ab$ un des côtés du polygone $R_0$; on aura:

$$\int_a^b g(z)dz = G(b) - G(a)$$

$G(b) - G(a)$ sera alors une des périodes de l'intégrale (4) de sorte qu'à chaque côté de $R_0$ correspond une de ces périodes.

Si $cd$ est le côté conjugué de $ab$, on aura évidemment:

$$G(b) - G(a) = G(c) - G(d)$$

Il en résulte qu'à deux côtés conjugués correspond la même période prise en sens contraire et qu'aux $2n$ paires de côtés conjugués de notre polygone, correspondra un système fondamental de $2n$ périodes de l'intégrale (4). Mais ces périodes ne seront pas les périodes normales.

Mais parmi les polygones équivalents à $R_0$, en vertu de la règle du § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, il en est un qui présente à cet égard une particularité remarquable. Considérons un polygone $R'_0$ de $4n$ côtés dont les sommets soient en suivant le périmètre dans le sens positif:

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n.$$

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment ce dernier sommet par les lettres $d_n$ et $d_0$. Je suppose que le côté $d_{i-1}\ a_i$ soit conjugué de $b_i\ c_i$ et que le côté $a_i\ b_i$ soit conjugué de $c_i\ d_i$. En d'autres termes le côté de rang $4p + 1$ est conjugué du côté de rang $4p + 3$, et le côté de rang $4p + 2$ conjugué du côté de rang $4p + 4$. On voit sans peine que tous les sommets d'un pareil polygone appartiennent à un même cycle et que le polygone $R'_0$ appartient au genre $n$. Je suppose de plus que la somme des angles soit égale à $2\pi$; on voit alors facilement qu'il peut être ramené à un polygone tel que $R_0$ par l'application de la règle du § 9.

Envisageons maintenant deux intégrales abéliennes de 1[ère] espèce.

$$\int g(x, y)dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(z) \tag{4}$$

$$\int g_1(x, y)dx = \int g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = G_1(z) \tag{5}$$

Posons:

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{b_i}^{c_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(a_i) - G(d_{i-1}) = A_i$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{c_i}^{d_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(b_i) - G(a_i) = B_i$$

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{b_i}^{c_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = G_1(a_i) - G_1(d_{i-1}) = A'_i$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{c_i}^{d_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = G_1(b_i) - G_1(a_i) = B'_i$$

Les périodes $A_i$, $B_i$, $A'_i$, $B'_i$ des intégrales (4) et (5) correspondront ainsi aux divers côtés du polygone $R'_0$.

Si maintenant nous prenons l'intégrale:

$$\int G_1(z)g(z)\frac{dx}{dz}dz$$

le long du périmètre de $R'_0$, cette intégrale doit être nulle et en développant l'intégrale, on trouve sans peine l'identité bien connue:

$$\sum_i (A_iB'_i - B_iA'_i) = 0$$

ce qui prouve que les périodes $A_i$, $B_i$, etc. sont les périodes normales.

Je n'insiste pas sur ces considérations qui montrent quel parti on pourra tirer des fonctions fuchsiennes pour l'étude des intégrales abéliennes.

Je suppose maintenant que la somme des angles de $R_0$ soit, non plus $2\pi$, mais $\frac{2\pi}{\beta}$, $\beta$ étant un entier.

Voyons quel changement cette hypothèse apportera dans ce qui précède. La relation (1) sera toujours de genre $n$. La fonction $\varphi(x, y)$ jouira des mêmes propriétés que dans le cas précédent, avec cette seule diffé-

rence qu'elle deviendra infinie pour $x = a$, $y = b$; c'est à dire pour les valeurs de $x$ et de $y$ qui correspondent aux sommets du polygone $R_0$.

On aura alors:

$$\lim. (x - a)^2 \varphi(x, y) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_s}\right) \qquad (\text{pour } x = a, \ y = b)$$

Les points singuliers de l'équation (3) sont alors ceux de la relation (1) et le point $a$, $b$.

Considérons maintenant un polygone $R_0$ de la 1[ère] famille, mais d'ailleurs tout à fait quelconque; soit $2n$ le nombre des côtés et $p$ le nombre des cycles. Supposons, que si l'on calcule la somme des angles appartenant aux différents cycles, on trouve respectivement $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\ldots \frac{2\pi}{\beta_p}$, pour le 1[er], le 2[d], ... et le $p$[e] de ces cycles. Les fonctions fuchsiennes dérivées de ce polygone $R_0$ s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai $x$ et $y$ et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$(1) \qquad \psi(x, y) = 0$$

de genre:

$$P = \frac{n - p + 1}{2}.$$

Soient $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, .... $(a_p, b_p)$ les valeurs que prennent $x$ et $y$ quand la variable $z$ vient en l'un des sommets du 1[er], du 2[d], ..... ou du $p$[e] cycle.

J'appelle $(c_i, d_i)$ les points analytiques pour lesquels on a:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0$$

J'appelle $(e_i, f_i)$ les points analytiques pour lesquels on a:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = 0$$

Je conserve d'ailleurs pour la fonction $\psi(x, y)$ que je suppose d'ordre $r$, les hypothèses faites plus haut. Le nombre des points $c_i$, $d_i$ est alors:

$$r(r-1) + 2P - (r-1)(r-2) = 2r + 2P - 2$$

et celui des points $e_i$, $f_i$ est

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P$$

L'équation (3) s'écrira:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

La fonction $\varphi(x, y)$, rationnelle en $x$ et en $y$, devient infinie:
1° pour $x = c_i$, $y = d_i$; on a alors:

$$\lim. (y - d_i)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = c_i, \ y = d_i)$$

2° pour $x = a_i$, $y = b_i$; on a alors:

$$\lim. (x - a_i)^2 \varphi(x, y) = \frac{1 - \beta_i^2}{4\beta_i^2} \qquad (\text{pour } x = a_i, \ y = b_i)$$

Les conditions auxquelles on doit assujettir le groupe $G$ pour que l'on ait entre $x$ et $y$ une relation (1) donnée et pour que les quantités $(a_i, b_i)$ et les nombres entiers $\beta_i$ aient des valeurs données sont au nombre de $6P - 6 + 2p$. Le nombre des paramètres dont dépend le groupe $G$ est aussi de $6P - 6 + 2p$. Il ne s'en suit pas immédiatement que l'on puisse disposer de ces $6P - 6 + 2p$ paramètres de façon à satisfaire à ces $6P - 6 + 2p$ conditions. Mais je démontrerai dans un mémoire ultérieur qu'il en est effectivement ainsi et qu'il existe *toujours* deux fonctions fuchsiennes $x$ et $y$ qui correspondent à un même groupe $G$, entre lesquelles il y a une relation algébrique *donnée*

$$\psi(x, y) = 0$$

et qui pour $p$ systèmes *donnés* de valeurs $(x = a_1, y = b_1)$, $(x = a_2, y = b_2)$,... $(x = a_p, y = b_p)$ voient leurs dérivées des $\beta_1 - 1$, $\beta_2 - 1$, ... $\beta_p - 1$ premiers ordres s'annuler, ($\beta_1$, $\beta_2$, .... $\beta_p$ étant des nombres entiers *donnés*).

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes. Leur forme générale sera:

(6) $$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y)$$

$F$ désignant une fonction rationnelle de $x$ et de $y$.

Quelles sont les conditions pour que cette fonction thétafuchsienne soit de 2[de] espèce, c'est à dire reste holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $F(x, y)$ pourra toujours s'écrire

$$\frac{P(x, y)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^m (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(x-a_p)^{\lambda_p}}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ étant les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités:

$$\lambda_i \leqq m\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right)$$

On reconnaîtra ensuite aisément quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction (6) soit de 2[de] espèce:

1° La fonction rationnelle $P(x, y)$ devra se réduire à un polynôme entier.

2° Les $p(r-1)$ points d'intersection de la courbe $\psi(x, y) = 0$ avec les droites $x = a_1, x = a_2, \ldots x = a_p$ [en exceptant les points singuliers $(x = a_1, y = b_1), (x = a_2, y = b_2), \ldots\ldots (x = a_p, y = b_p)$] devront appartenir à la courbe $P(x, y) = 0$; cette dernière devra avoir un contact d'ordre $\lambda_i - 1$ avec la courbe $\psi(x, y) = 0$ aux points où cette courbe rencontre la droite $x = a_i$ (en exceptant toujours le point singulier $x = a_i$, $y = b_i$).

Cela équivaut pour le polynôme $P(x, y)$ à:

$$(r-1)(\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_p) = (r-1)\sum\lambda$$

conditions.

3° Le degré du polynôme $P(x, y)$ devra être au plus égal à:

$$\sum\lambda + m(r-3)$$

4° Considérons maintenant les points $x = e_i$, $y = f_i$, c'est à dire les points doubles de la courbe $\psi(x, y) = 0$; ils devront appartenir à la

courbe $P(x, y) = 0$, et même (puisque $m > 1$) être pour cette courbe un point double. Enfin les deux branches de la courbe $P = 0$ devront avoir respectivement avec les deux branches de la courbe $\psi = 0$, un contact d'ordre $m - 2$. Cela équivaut pour le polynôme $P(x, y)$ à $2m - 1$ conditions pour chacun des points doubles $x = e_i$, $y = f_i$, c'est à dire en tout à

$$(2m-1)\left(\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right)$$

conditions.

Un polynôme de degré $\sum\lambda + m(r-3)$ dépend de:

$$\frac{1}{2}\left[\sum\lambda + m(r-3) + 1\right]\left[\sum\lambda + m(r-3) + 2\right]$$

paramètres. Mais si l'on tient compte de la relation (1) et si l'on a:

$$\sum\lambda + m(r-3) \geq r \tag{7}$$

ce nombre se réduit à:

$$r\sum\lambda + \left(m - \frac{1}{2}\right)r(r-3).$$

Mais notre polynôme est assujetti d'une part à $(r-1)\sum\lambda$, d'autre part à $(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right]$ conditions. Il reste donc dans ce polynôme:

$$\sum\lambda + (2m-1)(P-1) \tag{8}$$

paramètres arbitraires. Mais ce n'est là qu'une limite inférieure du nombre des paramètres arbitraires restant réellement dans notre polynôme. Car il se peut faire:

1° Que la condition (7) ne soit pas remplie. Alors l'expression des paramètres arbitraires restant dans notre polynôme n'est plus

$$\sum\lambda + (2m-1)(P-1)\ .$$

mais:

$$\frac{1}{2}\left(\sum\lambda + m(r-3)+1\right)\left(\sum\lambda + m(r-3)+2\right) - (r-1)\sum\lambda - (2m-1)\left(\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right)$$

Cette seconde expression diffère de la première de:

$$\frac{1}{2}\left(\sum\lambda + m(r-3) - r + 1\right)\left(\sum\lambda + m(r-3) - r + 2\right)$$

Il en résulte que les deux expressions ne diffèrent pas si l'on a:

$$\sum\lambda + (m-3) - r = -1 \text{ ou } -2$$

L'expression (8) ne cesse par conséquent de représenter le nombre des paramètres restés arbitraires que si l'on a:

$$\sum\lambda + (m-1)r - 3m < -2$$

Or cette inégalité jointe à $m \geqq 2$, $r \geqq 3$, entraîne les égalités suivantes:

$$r = 3 \qquad \sum\lambda = 0$$

Mais ce cas où l'on a $r = 3$, $P = 1$, $\sum\lambda = 0$ et où par conséquent tous les $\lambda$ sont nuls, est précisément celui des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à nous occuper.

2° On peut se demander aussi si les

$$(r-1)\sum\lambda + (2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right]$$

conditions auxquelles nous avons assujetti notre polynôme sont toutes distinctes. Voici comment on peut tourner la difficulté. Soit $N$ le nombre des zéros distincts de l'expression (6); le nombre $N + 1$ sera évidemment une limite supérieure du nombre des paramètres restés arbitraires dans cette expression. Mais cette limite peut encore être abaissée. En effet l'expression (6) s'annule quand la variable $z$ vient en l'un des sommets de $R_0$; ce sont là des zéros qui ne sont pas arbitraires. Si donc $N'$ est le nombre des zéros réellement distincts qui coïncident avec les sommets

de $R_0$, nous devons prendre pour notre limite supérieure $N - N' + 1$. Ce n'est pas tout. Si l'on considère une expression rationnelle en $x$ et $y$, admettant $q$ zéros et $q$ infinis, la théorie des intégrales abéliennes nous apprend qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les $q$ zéros et les $q$ infinis, mais que la connaissance des $q$ infinis et de $q - P$ des zéros suffit pour déterminer les $P$ derniers zéros. Or les $N - N'$ zéros qui restent de notre expression (6) sont ceux de la fonction rationnelle:

$$\frac{P(x,\ y)}{[F'(y)]^m (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(x-a_p)^{\lambda_p}}$$

dont nous connaissons les infinis. Il en résulte que $N - N' - P$ d'entre eux suffisent pour déterminer tous les autres et que nous devons prendre finalement pour notre limite supérieure $N - N' - P + 1$.

Or les principes du § 3 nous donnent:

$$N = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_i}\right).$$

$$N' = \sum \frac{m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i}{\beta_i} = mp - m\sum\frac{1}{\beta_i} - \sum\lambda$$

$$N - N' - P + 1 = \sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$$

c'est à dire que notre limite supérieure coïncide avec la limite inférieure trouvée plus haut. Il y aurait exception dans le cas $\sum\lambda = 0,\ P = 1$ c'est à dire dans le cas des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à parler.

Il résulte de là que toutes les fonctions thétafuchsiennes de la 2de espèce (aussi bien celles qui peuvent s'exprimer par une série de la forme (4) § 1 que celles qui ne peuvent s'exprimer par une pareille série) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles.

Considérons maintenant une fonction de la forme:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x,\ y)$$

$F$ désignant une fonction rationnelle en $x$ et en $y$ et cherchons quel est le minimum du nombre des infinis distincts d'une pareille expression.

Nous supposerons que les sommets de $R_0$ ne sont pas des infinis de notre fonction $A(z)$. Pour que le nombre des infinis soit minimum il faut que celui des zéros le soit aussi, il faut par conséquent que les sommets de $R_0$ soient des zéros d'un ordre aussi peu élevé que possible. Pour réaliser cela, posons, ce qui est toujours possible:

$$F(x, y) = \frac{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(x-a_p)^{\lambda_p}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^{m-1}}{P(x, y)}$$

les $\lambda$ étant précisément les nombres entiers définis plus haut. Nous reconnaitrons que pour que le nombre des zéros distincts soit un minimum, il faut et il suffit 1° que $P(x, y)$ soit un polynôme entier de degré $\sum\lambda + (m-1)(r-3)$, 2° que la courbe $P = 0$ passe par tous les points d'intersection de la courbe $\psi = 0$ avec les droites $x = a_1$, $x = a_2$, .... $x = a_p$ autres que les points singuliers ($x = a_i$, $y = b_i$) et que les deux courbes aient en ces points un contact d'ordre $\lambda_i - 1$. 3° enfin que la courbe $P = 0$ admette les mêmes points doubles que $\psi = 0$; et de façon que les branches qui se croisent en ces points doubles aient avec celles de $\psi = 0$ des contacts d'ordre $m - 2$.

En effet il est possible de satisfaire à ces conditions, car le polynôme $P(x, y)$ contient comme on l'a vu:

$$r\sum\lambda + \left(m - \frac{3}{2}\right)r(r-3)$$

paramètres et nous n'avons à remplir que:

$$(r-1)\sum\lambda + \left(m - \frac{3}{2}\right)[(r-1)(r-2) - 2P]$$

conditions.

Il reste donc:

$$\sum\lambda + (2m-3)(P-1)$$

paramètres arbitraires dans notre polynôme $P(x, y)$. De plus on voit aisément que si nos conditions sont remplies, le nombre des zéros distincts

et par conséquent celui des infinis est minimum, car le nombre des zéros distincts qui se confondent avec les sommets de $R_0$ est aussi petit que possible et il n'y a pas de zéro en dehors de ces sommets. On trouve, en appliquant la règle du § 3 que le nombre minimum des infinis est

$$J = \sum \lambda + (2m - 2)(P - 1)$$

Comme le polynôme $P(x, y)$ ne dépend que de $\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$ paramètres il s'en suit que nos $J$ infinis distincts ne peuvent pas être choisis arbitrairement, mais que la connaissance de $J - P$ d'entre eux suffit pour déterminer les $P$ autres. On ne peut donc en général déterminer la fonction $A$ de telle sorte qu'elle ait $J$ infinis donnés et qu'elle n'en ait pas d'autres.

Quel est le plus petit nombre $J'$ tel que l'on puisse toujours déterminer la fonction $A$ de telle sorte qu'elle ait $J'$ infinis donnés et n'en ait pas d'autres? La fonction $A$ admettra alors $J' - J$ zéros et $J' - J$ infinis distincts de plus que les fonctions de même forme qui n'ont que $J$ infinis, et par conséquent elle contiendra $2J' - 2J$ paramètres de plus qu'elles, ou en tout

$$2J' - 2J + \sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$$

ou, en remplaçant $J$ par sa valeur:

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1)$$

on doit donc avoir

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1) \geqq J' + 1$$

ou

$$J' \geqq \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1) + 1 \tag{9}$$

Voilà donc la limite inférieure cherchée du nombre $J'$.

Maintenant nous allons pouvoir résoudre une question importante qui se pose tout naturellement. Nous avons vu que toutes les expressions

de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles. Les séries thétafuchsiennes de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce pouvant toutes se mettre sous la forme (6) pourront donc s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles. Mais nous ne savons pas encore si toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer par une série (4) § 1. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce, s'exprimeraient linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1) - 1$ d'entre elles. Je vais démontrer que cette hypothèse est impossible.

En effet, nous avons vu dans le paragraphe précédent (pages 244 sq) que si toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce s'expriment linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles on pourrait construire une fonction

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(z)$$

$F(z)$ réprésentant une fonction fuchsienne de $z$ admettant $q$ infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Donc si l'hypothèse faite au début était possible, on pourrait construire une fonction $A(z)$ admettant $J' = \sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Le nombre $J'$ ne satisferait pas alors à l'inégalité (9) ce qui est contraire à ce qu'on a vu plus haut.

En conséquence, toute expression de la forme (6) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme d'une série (4) § 1 de la 2[de] espèce; donc *toute expression de la forme (6)* avec ou sans infinis, *pourra se mettre sous la forme d'une série (4) § 1* de la 1[ère] ou de la 2[de] espèces.

Passons à une propriété importante des fonctions de la forme $A(z)$. Ces fonctions auront toujours une infinité d'infinis; soient $z_1, z_2, \ldots . z_i \ldots .$ ces infinis, que nous supposerons tous simples pour fixer les idées, $A_1$, $A_2, \ldots . . A_i$, les résidus correspondants. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle n'ayant pas d'infinis à l'intérieur du cercle fondamental. On aura identiquement:

$$A(z)\varphi(z) = \sum_i \frac{A_i\varphi(z_i)}{z - z_i}$$

Cela se démontre de la même manière que dans le paragraphe précédent; la première démonstration peut se répéter sans qu'on y change un mot; la seconde demanderait pour être appliquée quelques modifications légères.

Les divers termes du second membre de l'identité précédente peuvent être groupés d'une manière plus avantageuse. Soient en effet $q$ le nombre des infinis distincts de $A(z)$; $z_1, z_2, \dots z_q$ ces infinis; $A_1, A_2, \dots A_q$ les résidus correspondants, nous pourrons écrire:

$$(10) \qquad A(z)\varphi(z) = \sum_k A_k \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{\left(z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2m}}$$

Dans cette formule on désigne par la notation $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ les diverses substitutions du groupe $G$. En différentiant la relation (10) $2m - 1$ fois par rapport à $z$, on arrive à une formule tout à fait analogue à la formule (16) du paragraphe précédent. Le premier membre est une expression de la forme (6) et le second membre est une série de la forme (4) § 1.

## § 7. *2^me^ Famille; genre 0.*

Considérons un polygone $R_0$ dont les sommets, au nombre de $2n$, sont tous situés sur le cercle fondamental et dont les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental. Tous les angles de notre polygone sont donc formés par deux arcs de cercle tangents l'un à l'autre et par conséquent, il sont tous nuls. Je supposerai que les côtés de rang $p$ et $2n + 1 - p$ sont conjugués; les cycles seront alors au nombre de $n + 1$, dont deux formés d'un seul sommet, le premier du sommet de rang 1; le second du sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles seront formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang $p$ et $2n + 2 - p$.

J'appelle $S_p$ la substitution qui change le côté de rang $p$ en celui de rang $2n + 1 - p$. Nous aurons ainsi $n$ substitutions $S_1, S_2, \dots\dots S_n$ qui seront les substitutions fondamentales de notre groupe $G$.

Je définis ensuite les substitutions $S'_2 \ldots\ldots S'_n$ par les égalités suivantes:

$$S'_2 = S_2 S_1^{-1},\ S'_3 = S_3 S_2^{-1},\ \ldots\ldots\ S'_n = S_n S_{n-1}^{-1}$$

et je pose pour plus de symétrie dans les notations:

$$S_1 = S'_1,\ \ S_{n+1} = S'_{n+1}$$

J'appelle maintenant $\alpha_i$ le sommet de rang $i$; il est clair que $\alpha_i$ sera l'un des points doubles de $S'_i$. Je supposerai que *les* $n+1$ *substitutions* $S'_1, S'_2, \ldots\ldots S'_{n+1}$ *sont paraboliques.* Cela ne serait pas possible si les $2n$ points $\alpha_i$ étaient choisis arbitrairement sur le cercle fondamental. Il faut qu'il y ait entre eux la relation:

(1) $$(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)\ldots\ldots(a_{2p} - a_{2p-1})\ldots\ldots(a_{2n} - a_{2n-1}) =$$
$$= (a_3 - a_2)(a_5 - a_4)\ldots\ldots(a_{2p+1} - a_{2p})\ldots\ldots(a_1 - a_{2n})$$

Dans ces conditions notre polygone $R_0$ est du genre 0 et du 1[er] ordre de la 2[de] famille; notre groupe $G$ et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent sont du genre 0 et de la 2[de] famille. Nous pourrons, comme dans le § 5, choisir parmi ces fonctions fuchsiennes une d'entre elles que j'appellerai $x = f(z)$ et en fonction de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de la définir, je supposerai que l'on a:

$$f(a_1) = 0 \qquad f(a_2) = 1 \qquad f(a_{n+1}) = \infty$$

Je poserai en outre comme dans le § 5

$$a_i = f(a_i) = f(a_{2n+2-i})$$

d'où

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = \infty$$

Si l'on pose

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

$v$ satisfait à une équation linéaire:

(3 bis) $$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en $x$. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$? On trouve aisément:

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{[Q(x)]^2}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_1)(x - a_2) \ldots . (x - a_n)$ et $P(x)$ étant un polynôme entier de degré $2n - 2$. Le polynôme $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$P(a_i) = -\frac{1}{4} Q'^2(a_i)$$

et

$$\text{coëfficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\frac{1}{4}$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que $x$ soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (3 bis). Il faut en outre assujettir $P(x)$ à $2n - 4$ conditions transcendantes.

Nous démontrerons dans un autre mémoire que l'on peut toujours choisir le groupe $G$ de telle sorte que les nombres $a_2, a_3, \ldots . a_n$ aient des valeurs données quelconques.

Dans le cas particulier où le polygone $R_0$ est symétrique par rapport au cercle qui joint $\alpha_1$ à $\alpha_{n+1}$ en coupant orthogonalement le cercle fondamental, les coëfficients de la fonction rationnelle $\varphi(x)$ sont tous réels.

Si de plus $n = 2$; $f(z)$ se réduit à la fonction modulaire $k^2$.

Voyons comment se comportent les intégrales de l'équation (3 bis) dans le voisinage de l'un des points singuliers $a_1, a_2, \ldots . a_n$. Les intégrales seront *régulières et logarithmiques,* pour employer les expressions de M. Fuchs et de ses disciples. Les deux racines de l'équation déterminante seront $\frac{1}{2}$; de telle sorte que les intégrales pourront se mettre sous la forme:

$$v_1 = (x - a_i)^{\frac{1}{2}}[P_i + Q_i \log (x - a_i)]$$

et

$$v_2 = (x - a_i)^{\frac{1}{2}} Q_i$$

$P_i$ et $Q_i$ étant des fonctions holomorphes en $x - a_i$ dont la 1ère s'annule et la 2me ne s'annule pas pour $x = a_i$.

Pour $x = \infty$, on a de même:

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}}(P_{n+1} + Q_{n+1} \log x) v_2$$

$P_{n+1}$ et $Q_{n+1}$ étant des fonctions holomorphes en $\frac{1}{x}$, dont la première s'annule et la seconde ne s'annule pas pour $x = \infty$.

Exprimons maintenant dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, $z$ en fonction de $x$. On devra avoir dans le voisinage de $x = a_i$:

$$z = \frac{\lambda Q_i + \mu[Q_i \log(x - a_i) + P_i]}{\lambda' Q_i + \mu'[Q_i \log(x - a_i) + P_i]}$$

$\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$ étant des constantes convenablement choisies. Supposons que la substitution $S'_i$ s'écrive

$$\left(\frac{1}{z - a_i}, \frac{1}{z - a_i} + \beta_i\right)$$

et posons:

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-a_i)\beta_i}} = t_i$$

exprimons ensuite que $z$ se réduit à $\alpha_i$ pour $x = a_i$ et subit la substitution $S'_i$ quand $\log(x - a_i)$ se change en $\log(x - a_i) + 2\pi\sqrt{-1}$. Nous verrons que la relation qui précède peut s'écrire:

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z - a_i)\beta_i} = P'_i + \log(x - a_i)$$

$P'_i$ étant une fonction holomorphe en $x - a_i$. On tire de là:

$$t_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-a_i)\beta_i}} = Q'_i$$

$Q'_i$ étant une fonction holomorphe en $(x - a_i)$; le développement de $Q'_i$ suivant les puissances de $(x - a_i)$ commence par un terme en $(x - a_i)$ dont le coëfficient ne peut jamais être nul. On tire de là:

$$x = a_i + \Phi_i(t_i)$$

$\Phi_i$ désignant une fonction holomorphe en $t_i$ et dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du 1^er^

degré dont le coëfficient n'est jamais nul. Telle est la forme de l'expression de $x$ en fonction de $z$ dans le voisinage du point singulier $x = a_i$. De même dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, $x = \infty$, on aura:

$$\frac{1}{x} = \Phi_{n+1}(t_{n+1})$$

$\Phi_{n+1}$ désigne une fonction holomorphe en $t_{n+1}$ et son développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du 1$^{er}$ degré qui n'est jamais nul. On peut encore écrire la relation précédente sous la forme:

$$x = \frac{1}{t_{n+1}} \Psi(t_{n+1})$$

$\Psi$ désignant une fonction holomorphe de $t_{n+1}$ ne s'annulant pas avec cette variable. Quant à la dérivée $\frac{dx}{dz}$, elle pourra se mettre sous une forme analogue. Dans le voisinage de $z = \alpha_i$, on aura:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha_i)^2} t_i \Phi'_i(t_i)$$

$\Phi'_i$ étant une fonction holomorphe de $t_i$ qui ne s'annule pas avec cette variable. De même dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, on aura:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha_{n+1})^2} \frac{\Psi'(t_{n+1})}{t_{n+1}}$$

$\Psi'$ désignant une fonction holomorphe de $t_{n+1}$ ne s'annulant pas avec cette variable.

Passons maintenant à l'étude des fonctions thétafuchsiennes.

Toute fonction représentée par une série de la forme (4) § 1 pourra toujours se mettre sous la forme suivante

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x) \tag{2}$$

$F$ désignant une fonction rationnelle de $x$. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet nous avons vu au § 2 que toute série de la forme (4) § 1, peut dans le voisinage de $z = \alpha_i$ se mettre sous la forme:

$$\frac{1}{(z - a_i)^{2m}} R(t_i)$$

$R$ désignant une fonction holomorphe de $t_i$ qui s'annule avec cette variable. Il en résulte que pour $x = a_i$, la fonction $(x - a_i)^m F(x)$ doit s'annuler et que quand $x$ augmente indéfiniment, $x^m F(x)$ doit tendre vers 0. Telles sont les conditions *nécessaires* auxquelles doit satisfaire l'expression (2) pour pouvoir représenter une série de la forme (4) § 1.

Nous les appellerons les conditions $A$.

Supposons maintenant que la fonction (2) n'admette pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. $F(x)$ devra être de la forme:

$$\frac{\Pi(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

$\Pi(x)$ désignant un polynôme entier en $x$. Mais à cause des conditions $A$, les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ sont au plus égaux à $m - 1$ et le degré de $\Pi(x)$ au plus égal à $n(m - 1) - m - 1$. Par conséquent toutes les séries thétafuchsiennes de la forme (4) § 1 et de la 2^de^ espèce s'expriment linéairement au moyen de $n(m - 1) - m$ d'entre elles.

Mais nous ne savons pas encore si toute expression de la forme (2) n'ayant pas d'infini et satisfaisant aux conditions $A$ peut se mettre sous la forme d'une série (4) § 1; ni par conséquent si toutes les séries de cette forme et de la 2^de^ espèce ne peuvent pas s'exprimer linéairement à l'aide de $n(m - 1) - m - 1$ d'entre elles.

Pour reconnaître s'il en est ainsi, considérons une fonction de la forme:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x)$$

$F$ désignant une fonction rationnelle et cherchons quel est le minimum du nombre $J'$ de ses infinis distincts, à supposer qu'elle tende vers 0 quand $z$ tend vers $\alpha_i$.

Nous pourrons écrire:

$$F(x) = \frac{(x - a_1)^{m-1}(x - a_2)^{m-1} \dots (x - a_n)^{m-1} \Pi(x)}{\Phi(x)}$$

$\Pi(x)$ et $\Phi(x)$ désignant deux polynômes en $x$. Pour que $\Lambda(z)$ tende vers 0 quand $z$ tend vers $\alpha_i$, il faut et il suffit que

$$\Phi(a_1),\ \Phi(a_2),\ \ldots\ldots\ \Phi(a_n)$$

ne soient pas nuls et que le degré du numérateur surpasse au plus de $m-1$ celui du dénominateur. Or le degré de $\Phi(x)$ est le nombre $J'$ des infinis distincts de $\Lambda(z)$. On a donc:

$$J' \geqq n(m-1) - m + 1$$

Je dis alors qu'il est impossible d'exprimer linéairement toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^de^ espèce à l'aide de $n(m-1)-m-1$ d'entre elles; car, si cela avait lieu, on pourrait construire une fonction de la forme $\Lambda(z)$ ayant $n(m-1)-m$ infinis distincts, ce qui ne se peut pas comme nous venons de le voir. On en conclura donc (comme dans les deux paragraphes précédents) que toute expression de la forme (2) satisfaisant aux conditions $A$ peut être exprimée par une série de la forme (4) § 1.

La formule (10) du paragraphe précédent s'applique aussi aux fonctions qui nous occupent. On la démontrerait comme dans les deux paragraphes précédents; la première démonstration demanderait quelques modifications légères, la seconde peut s'appliquer sans qu'on y change rien. Toutes les conséquences que nous avons déduites de cette formule (10) dans les deux paragraphes précédents, et entre autres la formule (16) du § 5, sont encore vraies dans le cas qui nous occupe.

On voit aisément comment on étendrait les principes qui précèdent aux fonctions de la 2^de^ et de la 6^me^ familles et de genre quelconque.

Nous pouvons donc passer à l'étude des fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan.

## § 8. *3^me^ Famille.*

Parmi celles-ci les plus simples sont celles de la 3^me^ famille dont nous allons parler d'abord.

Supposons qu'on nous donne $n$ paires de cercles ($c_1$ et $c'_1$), ($c_2$ et $c'_2$), ..... ($c_n$ et $c'_n$).

Je suppose que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres, qu'ils coupent orthogonalement le cercle fondamental et soient par

conséquent symétriques par rapport à ce cercle. Je suppose que l'on considère $n$ substitutions $S_1$, $S_2$, .... $S_n$, telles que $S_i$ tout en conservant le cercle fondamental change $c_i$ en $c'_i$. Le groupe dérivé des substitutions $S_i$ sera un groupe fuchsien $G$ dont le polygone générateur $R_0$ se composera de la partie du plan qui est intérieure au cercle fondamental et extérieure aux divers cercles $c$ et $c'$. Le polygone $R_0$ aura $2n$ côtés de la 1ère sorte, formés par les arcs des cercles $c$ et $c'$ intérieurs au cercle fondamental et $2n$ côtés de la 2de sorte formés par les arcs du cercle fondamental extérieurs aux différents cercles $c$ et $c'$. Tous les sommets de $R_0$ sont de la 3me catégorie. Quant au polygone $R'_0$, symétrique de $R_0$ par rapport au cercle fondamental, ce sera la partie du plan qui est extérieure à la fois au cercle fondamental et aux cercles $c$ et $c'$. Le groupe $G$ et par conséquent les fonctions fuchsiennes qui en dérivent seront de la 3me famille et du genre $n$.

Toutes ces fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai $x$ et $y$ et entre lesquelles il y aura une relation algébrique de genre $n$:

(1) $$\psi(x, y) = 0$$

Si l'on pose de plus

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction $v$ satisfera à l'équation (3) du § 4, à savoir:

(3) $$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

$\varphi$ étant rationnel en $x$ et en $y$.

Le groupe $G$ ne dépendant que de $3n - 3$ paramètres réels distincts, on ne peut en disposer de manière que la relation $\psi(x, y) = 0$ soit quelconque. Combien, en effet, reste-t-il de paramètres arbitraires dans une relation algébrique de genre $n$:

(1) $$\psi(x, y) = 0$$

lorsqu'on convient de ne pas regarder comme distinctes de cette relation celles que l'on en déduit en y remplaçant $x$ et $y$ par des fonctions ration-

nelles de $x'$ et de $y'$. On sait qu'il reste $3n - 3$ paramètres que l'on appelle les *modules* de la relation (1) et qui sont pour ainsi dire des invariants à l'égard de cette relation et des opérations qui consistent à y remplacer $x$ et $y$ par des fonctions rationnelles de $x'$ et $y'$. En nous proposant d'obtenir entre nos deux fonctions fuchsiennes $x$ et $y$ une relation algébrique *donnée*, nous nous imposons donc $3n - 3$ conditions *complexes* qui équivalent à $6n - 6$ conditions *réelles*. Ce nombre surpasse de $3n - 3$ celui des paramètres dont nous disposons. Ainsi le premier membre de la relation (1) est assujetti à $3n - 3$ conditions réelles, il est aisé de les trouver.

En effet, on peut supposer que l'on fasse une opération qui consiste à changer $z$ en son symétrique par rapport au cercle fondamental. Cela revient à changer $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ et à faire ensuite un changement linéaire de variable. On change ainsi $R_0$ en $R'_0$ et réciproquement de sorte que le groupe $G$ et le système des fonctions fuchsiennes qui en dérivent ne changent pas. Les $3n - 3$ modules de la relation (1) ne changent donc pas non plus. Mais quand on a changé $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, ces modules ont dû se changer en leurs imaginaires conjugués; puis, quand on a fait un changement linéaire de variable, ils n'ont pas changé. Par conséquent *les* $3n - 3$ *modules de la relation (1)* ne diffèrent pas de leurs imaginaires conjugués, *ils sont donc réels*.

Il en résulte qu'on pourra toujours choisir $x$ et $y$ parmi les fonctions fuchsiennes dérivées du groupe $G$ de telle sorte que *tous les coëfficients de la relation (1) soient réels*. Alors les coëfficients de $\varphi(x, y)$ seront aussi tous réels.

Je suppose de plus que l'on ait choisi $x$ et $y$, ce qui est toujours possible, de façon que la relation (1) satisfasse aux conditions que nous avons imposées à la relation (1) du § 6, au commencement de ce paragraphe (page 255).

Cela posé, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfera aux conditions suivantes:

1° Quand $x$ devient infiniment grand du 1^er^ ordre, elle devient infiniment petite du 4^e^ ordre.

2° Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ seront les points singuliers de la fonction $y$ de $x$, définie par la relation (1) en n'y comprenant pas les points doubles de la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$. Si l'un de ces points est $x = a$, $y = b$, on aura:

$$\lim. (y-b)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\varphi(x, y) = -\frac{3}{4}$$

pour $x = a$, $y = b$.

Ces conditions qui, on le remarquera, sont les mêmes que celles que nous avions trouvées dans le premier exemple, examiné au § 6, ne suffisent pas pour déterminer la fonction rationnelle $\varphi(x, y)$. Celle-ci est en outre assujettie à $n$ conditions transcendantes. Voici sous quelle forme on peut présenter ces conditions transcendantes:

La fonction $\varphi(x, y)$ devra être choisie de telle sorte qu'en faisant décrire au point analytique $(x, y)$ $n$ cycles convenablement choisis (correspondant à $n$ périodes convenablement choisies d'une intégrale abélienne de 1ère espèce $\int g(x, y)dx$) on voie revenir les intégrales de l'équation (3) à leurs valeurs initiales.

Passons maintenant à l'étude des séries thétafuchsiennes:

$$\Theta(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

c'est à dire à l'étude des séries de la forme (4) § 1, et d'abord cherchons comment il peut arriver que la fonction définie par cette série ne présente aucun infini en dehors des points singuliers essentiels.

En général la série $\Theta(z)$ admet comme infinis, ainsi qu'on l'a vu au § 3: 1° les points correspondants du point $\infty$, c'est à dire les points

$$z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$$

2° les infinis de la fonction $H(z)$ et les points correspondants.

Supposons pour fixer les idées que la fonction $H(z)$ ne devienne infinie pour aucun des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Quelle est d'abord la condition pour que les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ ne soient pas des infinis de $\Theta(z)$? Pour cela, il faut et il suffit que le degré du dénominateur de la fonction rationnelle $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur.

Considérons maintenant un infini $a$ de la fonction $H(z)$ elle-même. Dans la série $\Theta(z)$, le terme

$$H(z)$$

(correspondant à $\alpha_i = 1$, $\delta_i = 1$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, c'est à dire à la substitution unité) deviendra infini pour $z = a$. Pour que $\theta(z)$ reste fini pour $z = a$, il faut donc qu'un autre terme de cette série devienne infini, de façon que la somme de ces deux termes (qui séparément croissent indéfiniment quand $z$ tend vers $a$) tende au contraire vers une limite finie. Il faut pour cela que parmi les infinis de $H(z)$ il y en ait un autre $z = b$, tel que:

$$b = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}$$

$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ étant une des substitutions du groupe $G$. Il est clair alors que le terme:

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

deviendra infini pour $z = a$. Mais il faut que la somme de ce terme et du terme $H(z)$ reste finie pour $z = a$. Soient donc $A$ et $B$ les résidus de $H(z)$ qui correspondent à $z = a$ et $z = b$. On aura:

$$H(z) = \frac{A}{z - a} + H'(z)$$

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m} = \frac{B}{z - a}(\gamma a + \delta)^{2-2m} + H'_1(z)$$

$H'(z)$ et $H'_1(z)$ étant des fonctions rationnelles de $z$ qui restent finies pour $z = a$. On devra donc avoir:

$$A + B(\gamma a + \delta)^{2-2m} = 0$$

Telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $\theta(z)$ reste fini pour $z = a$ et par conséquent aussi pour les points correspondants.

Cela posé, voici comment il faudra s'y prendre pour construire une fonction $\theta(z)$ qui n'admette aucun infini. Prenons une fonction rationnelle $H(z)$ admettant $2p$ infinis $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $a_3$, $b_3$, ...... $a_p$, $b_p$, et ayant pour résidus correspondants $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$, ...... $A_p$, $B_p$.

Je suppose de plus que l'on ait:

$$b_1 = \frac{\alpha_1 a_1 + \beta_1}{\gamma_1 a_1 + \delta_1}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2 a_2 + \beta_2}{\gamma_2 a_2 + \delta_2}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad b_p = \frac{\alpha_p a_p + \beta_p}{\gamma_p a_p + \delta_p}$$

$$\left(z, \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}\right), \quad \left(z, \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(z, \frac{\alpha_p z + \beta_p}{\gamma_p z + \delta_p}\right)$$

étant $p$ substitutions du groupe $G$. J'assujettis de plus les $2p$ résidus à deux systèmes de conditions. D'abord:

$$A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_p + B_p = 0$$

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \ldots\ldots + A_p a_p + B_p b_p = 0$$

$$A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + \ldots\ldots + A_p a_p^2 + B_p b_p^2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1 a_1^{2m-2} + B_1 b_1^{2m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_p a_p^{2m-2} + B_p b_p^{2m-2} = 0,$$

pour que le degré du dénominateur de $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur. Ensuite:

$$A_k + B_k(\gamma_k a_k + \delta_k)^{2-2m} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots p)$$

pour que $a_k$ et $b_k$ ne soient pas des infinis de $\theta(z)$.

Ces $p + 2m - 1$ conditions seront compatibles pourvu que:

$$p > 2m - 1$$

et si elles sont remplies, la série $\theta(z)$ formée à l'aide de la fonction rationnelle

$$H(z) = \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{A_k}{z - a_k} + \frac{B_k}{z - b_k}\right]$$

n'aura aucun infini. Je dirai alors qu'elle est de la 2[de] espèce, de sorte que nous avons ici, comme dans les trois paragraphes précédents, la distinction entre les deux espèces de séries thétafuchsiennes.

Toute série de la forme $\theta(z)$, à quelque espèce qu'elle appartienne, peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y) \tag{2}$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle d'$x$ et d'$y$. Celles des fonctions de la forme (2) qui n'admettent pas d'infinis, s'expriment linéairement, ainsi qu'on l'a vu au § 6, à l'aide de $(2m - 1)(n - 1)$ d'entre elles. Il résulte de là que toutes les séries $\theta(z)$ de la 2^de^ espèce s'expriment linéairement à l'aide de $(2m - 1)(n - 1)$ d'entre elles. Il nous reste à démontrer, comme dans les trois paragraphes précédents, qu'il est impossible de les exprimer linéairement à l'aide de $(2m - 1)(n - 1) - 1$ d'entre elles.

Posons pour abréger:

$$q = (2m - 1)(n - 1)$$

Supposons que toutes les séries $\theta(z)$ de la 2^de^ espèce puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles que j'appellerai $\theta_1$, $\theta_2$, ...... $\theta_{q-1}$; je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

En effet choisissons *au hasard* $q$ points, $z_1$, $z_2$, .... $z_q$; on pourra toujours trouver $q$ nombres $A_1$, $A_2$, .... $A_q$ tels que:

$$A_1\theta_1(z_1) + A_2\theta_1(z_2) + \dots\dots + A_q\theta_1(z_q) = 0$$
$$A_1\theta_2(z_1) + A_2\theta_2(z_2) + \dots\dots + A_q\theta_2(z_q) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_1\theta_{q-1}(z_1) + A_2\theta_{q-1}(z_2) + \dots\dots + A_q\theta_{q-1}(z_q) = 0$$

et par conséquent tels que:

$$A_1\theta(z_1) + A_2\theta(z_2) + \dots\dots + A_q\theta(z_q) = 0 \tag{5}$$

$\theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (4) § 1 et de la 2^de^ espèce.

Soit $p$ un nombre entier plus petit que $2m$. Je pourrai toujours former une fonction $\theta_p(z)$ qui satisfasse aux conditions suivantes: elle n'admettra d'autre infini que les points $z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; ces infinis seront d'ordre

$2m - p$. Dans ces conditions le point $z = \infty$ n'est pas un infini de notre fonction $\theta_p(z)$, c'est pour elle un zéro d'ordre $p$.

Je suppose que:

$$\lim. z^p \theta_p(z) = 1 \qquad \text{pour } z = \infty$$

$$\lim. z^{2m-1-p}\left[z^p \theta_p(z) - 1\right] = 0 \qquad \text{pour } z = \infty$$

Ces conditions ne suffisent pas pour définir complètement la fonction $\theta(z)$, car si $\Theta(z)$ est une série de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce, $\theta_p(z) + \Theta(z)$ y satisfera comme $\theta_p(z)$. Mais nous choisirons pour notre fonction $\theta_p(z)$ une quelconque des séries de la forme (4) § 1, qui satisfont aux conditions énoncées.

Considérons une série quelconque de la forme (4) § 1 et de la 1[ère] espèce.

$$\Psi(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Supposons que la partie entière de la fonction rationnelle

$$z^{2m} H(z)$$

se réduise à:

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots\dots + B_{2m} z^{2m}$$

on verra aisément que le point $z = \infty$ est pour la fonction théta-fuchsienne

$$\psi(z) - B_0\theta_0(z) - B_1\theta_1(z) - B_2\theta_2(z) - \dots\dots - B_{2m}\theta_{2m}(z)$$

un zéro d'ordre $2m$ au moins et par conséquent que cette fonction théta-fuchsienne ne devient pas infinie pour $z = -\dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$.

Cela posé, envisageons la fonction suivante

$$\Phi(z,\ a) = \sum_i \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}}(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}$$

Considérée comme fonction de $z$, elle n'a d'autres infinis que les points

$$z = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}$$

c'est à dire les points correspondants de $a$.

Considérée comme fonction de $a$, c'est une série thétafuchsienne et elle admet comme infinis:

1° les points $a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, c'est à dire les points correspondants de $z$.

2° les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, c'est à dire les points correspondants de $a = \infty$. Ces points sont des infinis d'ordre $2m - 1$. Quant au point $a = \infty$ lui-même, c'est pour notre série un zéro du premier ordre.

Cherchons la partie entière de la fonction rationnelle

$$\frac{a^{2m}}{z - a}$$

nous trouverons:

$$-\left(a^{2m-1} + za^{2m-2} + z^2 a^{2m-3} + \ldots\ldots + z^{2m-2} a + z^{2m-1}\right)$$

On en conclut que la fonction thétafuchsienne:

$$\Omega(z, a) = \Phi(z, a) + z^{2m-1}\theta_0(a) + z^{2m-2}\theta_1(a) + \ldots\ldots + z\theta_{2m-2}(a) + \theta_{2m-1}(a)$$

n'admet pas comme infinis les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$.

En conséquence elle n'aura d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

le résidu correspondant sera:

$$-(\gamma_i z + \delta_i)^{2m-2}$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque de notre groupe $G$. La fonction:

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right)$$

sera comme $\Omega(z, a)$ une fonction thétafuchsienne de $a$; elle n'admettra comme elle d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

et avec les mêmes résidus; donc, on pourra écrire:

$$(6) \qquad (\gamma z + \delta)^{2m-2}\Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - \Omega(z, a) = \Theta(a)$$

$\Theta(a)$ désignant une fonction thétafuchsienne de $a$, susceptible d'être mise sous la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce. Posons maintenant:

$$(7) \qquad \Lambda(z) = A_1\Omega(z, z_1) + A_2\Omega(z, z_2) + \ldots\ldots + A_q\Omega(z, z_q)$$

En rapprochant les équations (5), (6) et (7) on trouve aisément l'identité suivante:

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\Lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Lambda(z)$$

qui a lieu pour toutes les substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ du groupe $G$. Il suit de là que $\Lambda(z)$ peut se mettre sous la forme:

$$(8) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de $x$ et de $y$. Or la fonction $\Lambda(z)$ admet $q$ infinis distincts $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$, qui ont été choisis au hasard, et n'en admet pas d'autre à distance finie. On pourrait donc construire une fonction de la forme (8) admettant $q$ infinis *donnés* et n'en admettant pas d'autre. Or nous avons vu au § 6 que cela était impossible. Donc l'hypothèse faite au début était absurde.

On en conclut comme dans les trois paragraphes précédents:

1° que toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce ne peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles,

2° que toute expression de la forme (2) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme (4) § 1.

3° que toute expression de la forme (2) peut être exprimée par une série de la forme (4) § 1 (pourvu que $m > 1$).

4° que toute fonction fuchsienne peut être égalée d'une infinité de manières au quotient de deux séries de la forme (4) § 1.

Considérons la fonction:

$$\varDelta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

Supposons qu'elle admette une infinité d'infinis $z_1, z_2, \ldots\ldots z_k, \ldots\ldots$ avec les résidus $A_1, A_2, \ldots\ldots A_k, \ldots\ldots$ Supposons de plus que l'on ait:

$$\varDelta(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots\ldots + B_1 z + \varDelta_1(z)$$

$\varDelta_1(z)$ tendant vers une limite finie quand $z$ croît indéfiniment. On aura identiquement:

$$(9) \qquad \varDelta(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots\ldots + B_1 z + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{z - z_k}$$

Cette identité se démontre de deux manières comme l'identité correspondante du § 5.

Un cas particulier bien remarquable est celui de $n = 1$.

Dans ce cas les substitutions du groupe $G$ se réduisent à:

$$\left(\frac{az + b}{cz + d}, \; K^p \frac{az + b}{cz + d}\right)$$

$a, b, c, d$ étant des constantes, $K$ étant un nombre réel positif et plus grand que 1, et l'exposant $p$ pouvant prendre dans les diverses substitutions toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Voici comment on peut former les fonctions fuchsiennes dans le cas qui nous occupe. Soit $f(\xi)$ une fonction doublement périodique admettant les périodes $2i\pi$ et $\log K$. La transcendante $f\left[\log\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right]$ sera alors une fonction fuchsienne.

Posons par exemple:

$$x = \mathrm{sn}\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right), \quad y = \mathrm{cn}\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right) \mathrm{dn}\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

Les expressions de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y) \tag{2}$$

pourront s'écrire:

$$\frac{f\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right)}{(az+b)^m(cz+d)^m} \tag{10}$$

$f(\xi)$ désignant toujours une fonction doublement périodique.

Les séries $\Theta(z)$ de la forme (4) § 1 deviendront d'autre part:

$$\sum_i \frac{K^{mi}\varphi\left(K^i\frac{az+b}{cz+d}\right)}{(cz+d)^{2m}} \tag{11}$$

$\varphi$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Egalons les expressions (10) et (11) et faisons y:

$$\frac{az+b}{cz+d} = e^\xi$$

il viendra:

$$f(\xi) = \sum_i K^{mi}e^{m\xi}\varphi(K^i e^\xi)$$

On obtient ainsi le développement d'une fonction doublement périodique de $\xi$ suivant une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de $e^\xi$. Si au lieu de $\xi$, on avait pris pour variable indépendante $\eta = \xi\sqrt{-1}$, le premier membre serait une fonction doublement périodique de $\eta$, et dans la série du second membre, tous les termes seraient des fonctions rationnelles de $\sin\eta$ et $\cos\eta$. Nous retrouvons par une voie détournée un résultat auquel Jacobi est parvenu directement et d'où il a tiré tant de belles conséquences.

Voyons maintenant ce que devient la formule (9) dans le cas particulier qui nous occupe.

On a:

$$A(z) = (az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1}f(\xi)$$

$f(\xi)$ étant toujours une fonction doublement périodique.

On a d'autre part dans le second membre:

1° un polynôme du degré $h$ en $z$; mais il est aisé de voir que dans le cas général, c'est à dire à moins que:

$$f\left(\log \frac{a}{c}\right) = \infty$$

le degré $h$ ne peut dépasser $2m - 2$. On peut donc le regarder comme un polynôme homogène de degré $2m - 2$ en $(az + b)$ et $(cz + d)$. Si on le divise par $(az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1}$, il prendra la forme suivante:

$$P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi})$$

$P_{m-1}$ et $P'_{m-1}$ désignant des polynômes de degré $m - 1$ en $e^{\xi}$ et en $e^{-\xi}$.

2° Un ensemble de termes $\sum \frac{A_k}{z - z_k}$ que l'on peut grouper de la façon suivante; soient $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$ les $q$ infinis distincts de $A(z)$ et supposons qu'il n'y en ait pas d'autre; soient $A_1, A_2, \ldots\ldots A_q$ les résidus correspondants; soient $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_q$ les valeurs correspondantes de $\xi$. Groupons ensemble tous les termes de la forme $\frac{A_k}{z - z_k}$ qui correspondent à des infinis qui ne sont pas distincts de $z = z_p$. Leur somme sera:

$$A_p \sum_i \frac{ce^{\xi} - a}{(cK^i e^{\xi_p} - a)^{2m-1}} \frac{K^{im}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi_p}} (ce^{\xi_p} - a)^{2m}$$

Comme on a d'autre part:

$$(az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1} = e^{(m-1)\xi}(ce^{\xi} - a)^{2-2m}$$

on trouvera pour la fonction doublement périodique $f(\xi)$ l'expression suivante

$$f(\xi) = P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi}) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=q} \left[ A_p(ce^{\xi_p} - a)^{2m} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left( \frac{ce^{\xi} - a}{cK^i e^{\xi_p} - a} \right)^{2m-1} \frac{K^{mi} e^{(1-m)\xi}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi_p}} \right]$$

## § 9. $5^{me}$ *Famille; genre 0.*

Je crois inutile de multiplier davantage les exemples. Ceux que j'ai étudiés jusqu'ici suffisent en effet pour faire voir comment on doit appliquer les principes généraux à chaque cas particulier.

Je veux cependant, sans traiter complètement les questions qui les concernent, dire quelques mots de certaines fonctions remarquables de la $5^{me}$ famille.

Considérons un polygone $R_0$ limité de la façon suivante: Il aura $2n$ côtés de la $1^{ère}$ sorte et 1 côté de la $2^{de}$ sorte; je suppose que ses sommets soient en suivant le périmètre dans le sens positif $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots\ldots \alpha_{2n}$. Je suppose que le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ soit de la $2^{de}$ sorte et les autres de la $1^{ère}$ sorte, de telle façon que les côtés $\alpha_0\alpha_1$ et $\alpha_0\alpha_{2n}$, $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$, $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}$, ...... $\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}$ et $\alpha_{2n-p}\alpha_{2n-p-1}$, ...... et enfin $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$, soient conjugués et par conséquent congruents. Si on laisse de côté $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$, tous les sommets seront de la $1^{ère}$ catégorie et se répartiront en $n$ cycles fermés. L'un des cycles ne comprendra que le sommet $\alpha_0$; les autres seront formés respectivement des sommets $\alpha_1$ et $\alpha_{2n}$, $\alpha_2$ et $\alpha_{2n-1}$, $\alpha_3$ et $\alpha_{2n-2}$, ...... enfin $\alpha_{n-1}$ et $\alpha_{n+2}$; de sorte que les angles curvilignes $\alpha_0$, $\alpha_1 + \alpha_{2n}$, $\alpha_2 + \alpha_{2n-1}$, ...... $\alpha_{n-1} + \alpha_{n+2}$ devront être des parties aliquotes de $2\pi$. Quant aux angles $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$, ils seront forcément droits puisque les côtés de la $1^{ère}$ sorte $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$ coupent orthogonalement le cercle fondamental, dont le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ n'est qu'un arc. Nous construirons ensuite un polygone $R'_0$ symétrique de $R_0$ par rapport au cercle fondamental. J'appellerai $\alpha'_i$ le sommet de $R'_0$ qui est symétrique de $\alpha_i$ par rapport au cercle fondamental.

On voit aisément que le polygone $R_0$ est de la $5^{me}$ famille et du genre 0, et qu'on peut s'en servir pour définir un groupe fuchsien et

une infinité de fonctions fuchsiennes. Celles-ci peuvent toutes s'exprimer rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai:

$$x = f(z)$$

Comme on peut choisir d'une infinité de manières parmi nos fonctions fuchsiennes une d'entre elles à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement, la fonction $x = f(z)$ ne serait pas complètement déterminée si nous n'ajoutions quelques conditions de plus.

Soient $\beta$ et $\gamma$ deux points du côté de la 2[de] sorte $\alpha_n \alpha_{n+1}$; je supposerai que l'on a:

$$f(\alpha_n) = f(\alpha_{n+1}) = 0 \qquad f(\beta) = 1 \qquad f(\gamma) = \infty.$$

Je poserai ensuite:

$$f(\alpha_i) = a_i \qquad f(\alpha'_i) = a'_i$$

Le polygone $R_0 + R'_0$ étant symétrique par rapport au cercle fondamental, on peut voir par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent que les nombres $a_i$ et $a'_i$ sont imaginaires conjugués.

Posons maintenant

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction $v$ satisfera à une équation différentielle de la forme (3 bis) § 4 puisque le groupe fuchsien correspondant est de genre 0. Cette équation, comme on le voit aisément, peut s'écrire:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\frac{P(x)}{[Q(x)]^2} \tag{3 bis}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_0)(x - a'_0)(x - a_1)(x - a'_1) \ldots\ldots\ldots (x - a_{n-1})(x - a'_{n-1})$ et $P(x)$ étant un polynôme de degré $4n - 4$ en $x$, ayant tous ses coëfficients réels.

## § 10. *Résumé.*

En étudiant les exemples précédents, j'ai rencontré différents résultats qui sont communs à toutes les fonctions fuchsiennes. Je ne crois pas utile d'en donner la démonstration dans le cas le plus général; car elle ne différerait pas de celles que nous avons données dans les divers cas particuliers et je serais entraîné à des redites sans intérêt. Je me bornerai donc à les énoncer ici sous forme de résumé.

Formons avec une fonction rationnelle quelconque $H(z)$ la série thêtafuchsienne

$$\sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta[z,\ H(z)] \tag{1}$$

Cette série pourra toujours se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x,\ y) \tag{2}$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de ces deux fonctions fuchsiennes $x$ et $y$, à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et entre lesquelles il y a une relation algébrique:

$$\psi(x,\ y) = 0 \tag{3}$$

Pour qu'une expression de la forme (2) puisse se mettre sous la forme (1), il faut qu'elle s'annule quand $z$ vient en un des sommets de la 2$^{\text{de}}$ catégorie du polygone $R_0$.

*A cette condition, toute expression de la forme (2) peut se mettre sous la forme (1) pourvu que m soit un entier plus grand que 1.*

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux séries telles que (1).

Les séries de la forme (1) sont de deux espèces: celles qui ont des infinis et celles qui n'en ont pas. Ces dernières peuvent s'exprimer linéaire-

ment à l'aide d'un nombre fini d'entre elles. Il y a donc entre les séries thétafuchsiennes de la $2^{me}$ espèce une infinité de relations linéaires.

Voici une de ces relations qui peut servir de point de départ pour trouver, sinon toutes les autres, au moins un grand nombre d'entre elles.

Soit $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe $G$. On aura identiquement:

$$\theta[z, H(z)] = \theta\left[z, H\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)(\gamma z+\delta)^{-2m}\right]$$

Considérons maintenant une fonction de la forme suivante:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant toujours une fonction rationnelle et $m$ un entier plus grand que 1. Je suppose de plus que cette fonction s'annule quand $z$ vient en un des sommets de la $2^{de}$ catégorie de $R_0$.

Soit $q$ le nombre des infinis distincts de $A(z)$; soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ ces infinis distincts; $A_1, A_2, \ldots A_q$ les résidus correspondants; soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque de $z$ n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental.

On aura identiquement:

$$(4) \qquad A(z)\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)}{z-\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2m}$$

si les fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et

$$(4 \text{ bis}) \qquad A(z) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k}{z-\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2m} + P(z)$$

($P(z)$ étant un polynôme entier en $z$) si les fonctions fuchsiennes existent dans tout le plan.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut d'une infinité de manières se mettre sous la forme du quotient de deux séries telles que (4) ou (4 bis).

## § 11. *Historique.*

Si on laisse de côté les fonctions doublement périodiques, les premières fonctions fuchsiennes qui aient été signalées sont les fonctions modulaires. Elles se présentaient pour ainsi dire d'elles-mêmes dans l'étude des transcendantes elliptiques, et leurs propriétés principales, en particulier celles d'être uniformes et d'admettre une ligne singulière essentielle, ont été remarquées depuis longtemps. D'ailleurs les travaux dont elles ont été l'objet et les résultats remarquables obtenus dans ces derniers temps par MM. Hermite, Dedekind, Fuchs et Klein sont trop connus pour que j'aie besoin d'insister.

Mais il est une autre catégorie de fonctions fuchsiennes dont l'existence a été signalée dès 1872. Ce sont celles auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de Gauss; ces fonctions ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons étudiées dans le § 5 et on les obtient quand le polygone $R_0$ considéré dans ce paragraphe est symétrique et se réduit à un quadrilatère.

Dans un mémoire inséré au Tome 75 du Journal de Borchardt, M. Schwarz annonce sans démonstration que ces fonctions sont uniformes et admettent un cercle comme ligne singulière essentielle. C'était du même coup annoncer la discontinuité du groupe correspondant, comme je l'ai déjà fait remarquer dans l'historique du mémoire sur les groupes fuchsiens. Malheureusement, détourné de ce sujet par d'autres études, M. Schwarz s'est borné aux quelques lignes qu'il avait consacrées à ces transcendantes et n'a pas poussé plus loin ses recherches.

Dans un autre ordre d'idées, M. Schwarz avait obtenu d'autres résultats qui se rapportent indirectement à notre sujet. Dans divers mémoires insérés aux Tomes 70 et 74 du Journal de Borchardt et aux Monatsberichte de l'Académie de Berlin, M. Schwarz a démontré d'une manière rigoureuse le principe dit de Dirichlet et la possibilité de l'*Abbildung* du cercle sur une figure plane quelconque et en particulier sur

un polygone limité par des arcs de cercle. S'il avait connu les conditions de discontinuité des groupes, il aurait pu être conduit ainsi à démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas particulier où le polygone $R_0$ est symétrique.

J'aurais donc pu me servir de ces résultats, mais j'ai préféré suivre une autre voie:

1° parce que je n'aurais pu démontrer ainsi l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas, où le polygone $R_0$ n'est pas symétrique.

2° parce que les développements en séries dont j'ai fait usage me donnaient non seulement la démonstration de l'existence de la fonction, mais son expression analytique.

Paris 23 Octobre 1882.

# NOTE SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

**Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite**

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

On a d'après M. HEINE:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int z^{a-1} e^z dz$$

L'intégration étant faite le long d'un contour qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les $x$ négatifs, le contour pouvant ne pas être fermé. Prenons pour contour deux droites inclinées d'un angle $\alpha$ passant par l'origine et un petit cercle autour de l'origine. L'intégrale le long du petit cercle est nulle pour $a$ ayant une partie réelle comprise entre 0 et 1. L'intégration le long des deux droites donne

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{\rho \cos \alpha} \sin(\rho \sin \alpha + a\alpha) d\rho$$

qui peut aussi se mettre sous la forme

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi\, (\sin \alpha)^a} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{\rho \cot \alpha} \sin(\rho + a\alpha) d\rho$$

Cette formule est vraie pour toute valeur de $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$.

Si on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, elle devient

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi}\int_0^\infty \rho^{a-1} \sin\left(\rho + \frac{a\pi}{2}\right) d\rho\,;$$

si on fait $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, elle devient

$$\Gamma(a) = \frac{(\sqrt{2})^a}{\sin a\pi}\int_0^\infty \rho^{a-1} e^{-\rho} \sin\left(\rho + \frac{3a\pi}{4}\right) d\rho$$

si on fait $\alpha = \pi$, elle devient

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{-\rho} d\rho\,.$$



N. H. Abel

1802—1829.

ACTA MATHEMATICA 1.

Lichtdruck von J. Jaeger, Stockholm.

# SUR UNE CLASSE DE GROUPES DISCONTINUS DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES ET SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES RESTANT INVARIABLES PAR CES SUBSTITUTIONS

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

La théorie des fonctions elliptiques a donné le premier exemple d'une fonction uniforme d'une variable ne changeant pas pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires non permutables faites sur cette variable: je veux parler de la fonction modulaire, c'est à dire du module considéré comme fonction du rapport des périodes, fonction étudiée, comme on sait, pour la première fois par M. HERMITE; des fonctions d'une variable se reproduisant pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires, ont été depuis l'objet de divers travaux, et, dans des recherches récentes, M. POINCARÉ a traité cette question dans toute sa généralité, en développant son admirable théorie des fonctions fuchsiennes.

Je me suis depuis longtemps proposé le problème de la recherche de fonctions de deux variables indépendantes qui puissent être considérées comme les analogues des fonctions elliptiques modulaires. On reconnait facilement que la théorie des fonctions abéliennes n'est pas susceptible, d'une manière générale, de conduire à des fonctions de plusieurs variables entièrement analogues aux fonctions modulaires. Prend-on, par exemple, les fonctions abéliennes du premier genre: elles conduisent à un système de trois modules, fonctions de trois variables indépendantes, dont les

propriétés ont été étudiées par M. HERMITE dans ses belles recherches sur la transformation des fonctions abéliennes (Comptes Rendus, 1855). Ces fonctions se reproduisent bien pour un groupe d'une infinité de substitutions faites sur les variables; mais ici ces substitutions ne sont plus linéaires. Ainsi donc, laissant nécessairement de deux côtés le cas de deux variables, on passe immédiatement à des fonctions de trois variables, et la forme linéaire des substitutions a disparu. C'est en étudiant un cas particulier des fonctions abéliennes du second genre (correspondant à $p = 3$) que j'ai trouvé l'extension cherchée. L'étude du groupe discontinu particulier correspondant à ces nouvelles fonctions m'a conduit à une classe étendue de groupes linéaires discontinus pour le cas de deux variables; c'est à l'étude de ces groupes qu'est consacrée cette première étude où je montre aussi qu'il existe des fonctions de deux variables que les substitutions de ces groupes laissent invariables. Dans un autre travail je reviendrai particulièrement sur les fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires; j'espère pouvoir montrer ensuite que tous ces résultats sont encore susceptibles de généralisations fort étendues, et indiquer l'intérêt que peut présenter la considération des fonctions de cette nature tant pour la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes que pour l'étude des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles.

1. Dans un de ses mémoires sur les formes quadratiques, M. HERMITE a étendu la théorie des formes quadratiques binaires, en étudiant les expressions

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0$$

les variables $x$ et $y$ sont des quantités complexes dont $x_0$ et $y_0$ représentent les conjuguées; les coëfficients extrêmes $a$ et $c$ sont réels et les coëfficients $b$ et $b_0$ sont des quantités imaginaires conjuguées.

Nous allons considérer ici une forme quadratique ternaire analogue:

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y$$

les coëfficients $a$, $a'$, $a''$ étant réels et les autres coëfficients étant deux à deux conjugués.

Effectuons sur les variables $x$, $y$, $z$ la substitution linéaire

$$x = aX + \beta Y + \gamma Z$$
$$y = a'X + \beta' Y + \gamma' Z$$
$$z = a''X + \beta'' Y + \gamma'' Z$$

en effectuant en même temps sur $x_0$, $y_0$, $z_0$ la substitution aux coëfficients conjugués

$$x_0 = a_0 X_0 + \beta_0 Y_0 + \gamma_0 Z_0$$
$$y_0 = a'_0 X_0 + \beta'_0 Y_0 + \gamma'_0 Z_0$$
$$z_0 = a''_0 X_0 + \beta''_0 Y_0 + \gamma''_0 Z_0$$

on voit de suite que cette substitution conduit à une transformée de forme toute semblable:

$$AXX_0 + A'YY_0 + A''ZZ_0 + BYZ_0 + B_0 Y_0 Z + B'ZX_0 + B'_0 Z_0 X + B''XY_0 + B''_0 X_0 Y$$

De plus si on pose:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b'_0 \\ b''_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}$$

et soit $\Delta$ la transformée de $\delta$ quand on y remplace les petites lettres par les grandes on aura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ a' & \beta' & \gamma' \\ a'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ a'_0 & \beta'_0 & \gamma'_0 \\ a''_0 & \beta''_0 & \gamma''_0 \end{vmatrix} \times \delta$$

Par conséquent l'expression $\delta$ jouera ici le rôle d'invariant.

La forme $f$ peut être mise sous une forme particulière. Posons en effet

$$ax + b''_0 y + b'z = u$$
$$(aa' - b''b''_0)y + (ab_0 - b'b'')z = v$$
$$z = w$$

On aura, comme on le reconnait immédiatement

$$(1) \quad f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{a(aa' - b''b''_0)} [vv_0 + (aa' - b''b''_0)uu_0 + a\delta . ww_0]$$

Nous supposons, bien entendu, que $a$ et $aa' - b''b''_0$ ne sont pas nuls. Les divers coëfficients $a$, $aa' - b''b''_0$ et $\delta$ sont réels. Cette formule, dans le cas où les coëfficients et les variables sont réels, donne évidemment la décomposition de la forme quadratique en une somme de carrés. Cette décomposition de la forme $f$ en une somme de termes de la forme $\varepsilon u u_0$ peut toujours se faire d'ailleurs quand l'invariant $\delta$ n'est pas nul et cela de telle manière que $u$, $v$ et $w$ sont linéairement indépendants; c'est un point entièrement élémentaire sur lequel nous n'insisterons pas et nous garderons la forme précédente en supposant que $a$ et $aa' - b''b''_0$ ne sont pas nuls.

Si $aa' - b''b''_0$ et $a.\delta$ sont positifs, la quantité entre parenthèses sera une somme de quantités positives et la forme $f$ aura par suite un signe invariable: elle sera définie. Dans tous les autres cas la forme sera indéfinie c'est à dire qu'elle sera susceptible de changer de signe.

2. Nous allons supposer maintenant que les coëfficients de la forme $f$ sont des nombres entiers; les coëfficients $a$, $a'$, $a''$ seront nécessairement des entiers réels, quant aux coëfficients $b$, $b'$, $b''$ ce sont des entiers complexes formés soit avec les racines de l'équation $\alpha^2 + 1 = 0$, soit avec celles de l'équation $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, c'est à dire les racines cubiques imaginaires de l'unité, soit d'une manière plus générale avec les racines de l'équation du second degré:

$$\lambda\alpha^2 + \mu\alpha + \nu = 0$$

où $\lambda$, $\mu$ et $\nu$ sont des entiers réels pour lesquels on a:

$$\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$$

Supposons qu'une substitution:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned}$$

à coëfficients entiers de la même nature que $b$, $b'$ et $b''$ transforme en elle-même la forme $f$; on en déduit immédiatement une substitution pour $u$, $v$, $w$ qui transforme en elle-même la forme:

$$vv_0 + luu_0 + a\delta ww_0 \quad (\text{en posant } l = aa' - b''b''_0)$$

Il suffit pour l'obtenir d'ajoindre aux équations (2) le système:

$$(3)\qquad \begin{aligned} u &= ax + b''_0 y + b'z & U &= aX + b''_0 Y + b'Z \\ v &= (aa' - b''b''_0)y + (ab_0 - b'b'')z & V &= (aa' - b''b''_0)Y + (ab_0 - b'b'')Z \\ w &= z & W &= Z \end{aligned}$$

Les équations (2) et (3) permettent d'exprimer $u$, $v$ et $w$ linéairement en $U$, $V$ et $W$. Il importe d'examiner quelle sera la nature des coëfficients de cette substitution; ce ne seront plus des entiers, mais en remarquant que le déterminant de la substitution (2) doit nécessairement avoir l'unité pour module, nous voyons que $u$, $v$ et $w$ s'exprimeront en fonction linéaire de $X$, $Y$ et $Z$ les coëfficients étant entiers. D'ailleurs si on exprime $X$, $Y$ et $Z$ en fonction de $U$, $V$ et $W$ les coëfficients seront des nombres fractionnaires dont le dénominateur sera un diviseur de $al$.

Nous avons donc une substitution:

$$(4)\qquad \begin{aligned} u &= M_1 U + P_1 V + R_1 W, \\ v &= M_2 U + P_2 V + R_2 W, \\ w &= M_3 U + P_3 V + R_3 W, \end{aligned}$$

les coëfficients étant des fractions dont le dénominateur divise $al$.

3. Ecrivons d'une manière générale la forme en $u$, $v$ et $w$ de la manière suivante:

$$\alpha u u_0 + \beta v v_0 + \gamma w w_0$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des entiers réels dont aucun n'est nul. Les substitutions (4) transformant cette expression en elle-même, on aura les relations:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \alpha M_1\mu_1 + \beta M_2\mu_2 + \gamma M_3\mu_3 &= \alpha \\ \alpha P_1\pi_1 + \beta P_2\pi_2 + \gamma P_3\pi_3 &= \beta \\ \alpha R_1\rho_1 + \beta R_2\rho_2 + \gamma R_3\rho_3 &= \gamma \\ \alpha P_1\mu_1 + \beta P_2\mu_2 + \gamma P_3\mu_3 &= 0 \\ \alpha M_1\rho_1 + \beta M_2\rho_2 + \gamma M_3\rho_3 &= 0 \\ \alpha P_1\rho_1 + \beta P_2\rho_2 + \gamma P_3\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

où les lettres grecques désignent les conjuguées des grandes lettres cor-

respondantes. En tenant compte des relations (5) les équations (4) se résolvent immédiatement par rapport à $U$, $V$ et $W$; on trouve ainsi

$$Ua = \alpha\mu_1 u + \beta\mu_2 v + \gamma\mu_3 w$$
$$V\beta = \alpha\pi_1 u + \beta\pi_2 v + \gamma\pi_3 w$$
$$W\gamma = \alpha\rho_1 u + \beta\rho_2 v + \gamma\rho_3 w$$

et l'on tire de là que le système (5) est entièrement équivalent au suivant:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{M_1\mu_1}{\alpha} + \dfrac{P_1\pi_1}{\beta} + \dfrac{R_1\rho_1}{\gamma} = \dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{M_2\mu_2}{\alpha} + \dfrac{P_2\pi_2}{\beta} + \dfrac{R_2\rho_2}{\gamma} = \dfrac{1}{\beta} \\ \dfrac{M_3\mu_3}{\alpha} + \dfrac{P_3\pi_3}{\beta} + \dfrac{R_3\rho_3}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma} \\ \dfrac{\mu_2 M_1}{\alpha} + \dfrac{P_1\pi_2}{\beta} + \dfrac{R_1\rho_2}{\gamma} = 0 \\ \dfrac{\mu_2 M_3}{\alpha} + \dfrac{P_3\pi_2}{\beta} + \dfrac{R_3\rho_2}{\gamma} = 0 \\ \dfrac{\mu_3 M_1}{\alpha} + \dfrac{P_1\pi_3}{\beta} + \dfrac{R_1\rho_3}{\gamma} = 0. \end{cases}$$

Ceci posé, supposons d'abord que $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ soient de même signe, par exemple positifs. On déduit de la forme des trois premières équations (6) que les substitutions sont en nombre limité, puisque les $M$, $P$, $R$ sont de la forme $\dfrac{E}{al}$, $E$ étant entier. Par conséquent il n'y a pour une forme quadratique définie $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ qu'un nombre limité de substitutions à coëfficients entiers, la transformant en elle-même.

4. Passons au cas où la forme est indéfinie, c'est à dire où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ ne sont pas de même signe, soit

$$\alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad \gamma = -g < 0.$$

Il y a dans ce cas une infinité de substitutions à coëfficients entiers transformant en elle-même la forme $f$. Je me propose d'établir la proposition suivante.

*Considérons le groupe des substitutions*

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

*effectuées sur les deux variables $x$ et $y$; je dis que ce groupe sera discontinu pour tout système de valeurs $x$ et $y$ telles que*

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

en posant $x = x' + ix''$ et $y = y' + iy''$.

Remarquons d'abord qu'en faisant sur $u$, $v$, $w$ la substitution

$$U = M_1 u + P_1 v + R_1 w$$
$$V = M_2 u + P_2 v + R_2 w$$
$$W = M_3 u + P_3 v + R_3 w$$

on aura:

$$\alpha U U_0 + \beta V V_0 - \gamma W W_0 = \alpha u u_0 + \beta v v_0 - \gamma w w_0$$

et par suite

$$\alpha(X'^2 + X''^2) + \beta(Y'^2 + Y''^2) - g = \frac{1}{\operatorname{mod}^2(M_3 x + P_3 y + R_3)} [\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g]$$

en posant, bien entendu, $X = X' + iX''$ et $Y = Y' + iY''$.

Il en résulte que si le système $x$, $y$ est à l'intérieur du domaine défini par l'inégalité

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) < g$$

il en sera de même du système des variables transformées $X$ et $Y$.

Observons maintenant qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de substitutions du groupe pour lesquelles le module de $R_3$ soit moindre qu'une quantité donnée $K$; c'est ce qui résulte des équations (5) et (6). L'équation:

$$\frac{M_3 \mu_3}{\alpha} + \frac{P_3 \pi_3}{\beta} = \frac{R_3 \rho_3}{g} - \frac{1}{g}$$

par exemple, montre que les modules de $M_3$ et $P_3$ seront limitées en fonction de $K$ et les trois premières équations (5) apprennent successivement qu'il en est de même pour $M_1$, $P_1$, $R_1$ et $M_2$, $P_2$, $R_2$. Donc

d'après leur forme, les quantités $M$, $P$, $R$ ne peuvent avoir qu'un nombre limité de valeurs.

Montrons enfin, et c'est le point essentiel dans notre démonstration, que quand le module de $R_3$ grandit indéfiniment

$$\operatorname{mod}(M_3 x + P_3 y + R_3)$$

grandit lui-même indéfiniment. On a en effet:

$$\operatorname{mod}(M_3 x + P_3 y + R_3) > \operatorname{mod} R_3 - \operatorname{mod}(M_3 x) - \operatorname{mod}(P_3 y)$$

le second membre de cette inégalité étant, comme nous allons voir, positif. Nous l'écrirons sous la forme:

$$\frac{\operatorname{mod}^2 R_3 - [\operatorname{mod}(M_3 x) + \operatorname{mod}(P_3 y)]^2}{\operatorname{mod} R_3 + \operatorname{mod}(M_3 x) + \operatorname{mod}(P_3 y)}$$

ou en remplaçant $\operatorname{mod}^2 R_3$ par sa valeur $1 + g\left(\frac{\operatorname{mod}^2 M_3}{\alpha} + \frac{\operatorname{mod}^2 P_3}{\beta}\right)$

$$\frac{1 + \left(\frac{g}{\alpha} - \operatorname{mod}^2 x\right)\operatorname{mod}^2 M_3 + \left(\frac{g}{\beta} - \operatorname{mod}^2 y\right)\operatorname{mod}^2 P_3 - 2\operatorname{mod} x \cdot \operatorname{mod} y \cdot \operatorname{mod} M_3 \operatorname{mod} P_3}{\operatorname{mod} R_3 + \operatorname{mod} x \cdot \operatorname{mod} M_3 + \operatorname{mod} y \cdot \operatorname{mod} P_3}$$

Or le numérateur, abstraction faite de l'unité, est un polynome homogène en $\operatorname{mod} M_3$ et $\operatorname{mod} P_3$; on vérifie aisément qu'il est essentiellement positif, le discrimmant est en effet:

$$\operatorname{mod}^2 x \cdot \operatorname{mod}^2 y - \left(\frac{g}{\alpha} - \operatorname{mod}^2 x\right)\left(\frac{g}{\beta} - \operatorname{mod}^2 y\right)$$

ou

$$\frac{g}{\beta}(x'^2 + x''^2) + \frac{g}{\alpha}(y'^2 + y''^2) - \frac{g^2}{\alpha\beta}$$

et on voit qu'il est négatif puisque, par hypothèse:

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) < g$$

d'autre part le coëfficient de $\operatorname{mod}^2 M_3$

$$\frac{g}{\alpha} - (x'^2 + x''^2)$$

sera certainement positif d'après l'inégalité précédente. Ecrivons maintenant la limite inférieure de $\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)$ sous la forme

$$\mathrm{mod}\,R_3 \cdot \frac{\left(\frac{g}{\alpha} - \mathrm{mod}^2 x\right)\frac{\mathrm{mod}^2 M_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} + \left(\frac{g}{\beta} - \mathrm{mod}^2 y\right)\frac{\mathrm{mod}^2 P_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} - 2\,\mathrm{mod}\,x\,\mathrm{mod}\,y\,\frac{\mathrm{mod}\,M_3}{\mathrm{mod}\,R_3}\cdot\frac{\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3} + \frac{1}{\mathrm{mod}^2 R_3}}{1 + \mathrm{mod}\,x \cdot \frac{\mathrm{mod}\,M_3}{\mathrm{mod}\,R_3} + \mathrm{mod}\,y \cdot \frac{\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3}}$$

D'après ce qui vient d'être dit et en remarquant que $\frac{\mathrm{mod}\,M_3}{\mathrm{mod}\,R_3}$ et $\frac{\mathrm{mod}\,P_3}{\mathrm{mod}\,R_3}$ restent, quand $R_3$ augmente indéfiniment, toujours moindres qu'une expression facile à déterminer puisque

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathrm{mod}^2 M_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{mod}^2 P_3}{\mathrm{mod}^2 R_3} = \frac{1}{g} - \frac{1}{g\,\mathrm{mod}^2 R_3}$$

on voit qu'on pourra fixer un nombre positif $A$ dépendant uniquement de $x$, $y$, $g$, $\alpha$ et $\beta$, auquel le coëfficient de $\mathrm{mod}\,R_3$ sera constamment supérieur, et on aura alors

$$\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3) > A \cdot \mathrm{mod}\,R_3$$

et il est donc bien établi que, quand $\mathrm{mod}\,R_3$ augmente indéfiniment, il en sera de même de $\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)$.

5. Ces remarques faites, la démonstration va s'achever bien aisément. Reprenons en effet l'égalité précédemment établie:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{mod}^2\,[M_3 x + P_3 y + R_3]}[-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g]$$

où les deux membres sont positifs; on aura, d'après l'inégalité ci-dessus écrite:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g < \frac{1}{\mathrm{mod}^2 R_3}\cdot\frac{1}{A^2}[-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g]$$

On en conclut que le groupe est discontinu; car on aurait dans le cas contraire une substitution

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3} \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

pour laquelle $X$ et $Y$ différeraient respectivement d'aussi peu que l'on voudrait de $x$ et $y$ et pour laquelle on aurait par conséquent:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g = (1+\varepsilon)[-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g]$$

$\varepsilon$ étant une quantité réelle dont la valeur absolue est moindre qu'un nombre positif $\eta$ donné à l'avance aussi petit que l'on voudra: par suite

$$(1+\varepsilon) < \frac{1}{\operatorname{mod}^2 R_3} \cdot \frac{1}{A^2}$$

donc

$$\operatorname{mod}^2 R_3 < \frac{1}{(1+\varepsilon)A^2} < \frac{1}{1-\eta} \cdot \frac{1}{A^2}$$

mais le nombre des substitutions pour lesquelles le carré du module de $R_3$ est moindre que $\frac{1}{1-\eta} \cdot \frac{1}{A^2}$ est fini, d'après une remarque faite précédemment, et on ne peut évidemment pas alors trouver parmi elles des substitutions pour lesquelles $X$ et $Y$ diffèrent de $x$ et $y$ d'aussi peu que l'on voudra.

On voit d'ailleurs que, pour la suite des systèmes de valeurs $X$ et $Y$, quand on effectue sur $x$ et sur $y$ toutes les substitutions du groupe, l'expression positive

$$g - \alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2)$$

tend vers zéro, puisque $\operatorname{mod} R_3$ grandit sans limite.

Il est clair que l'analyse précédente ne subsiste pas, si le système $x$, $y$ est en dehors du domaine défini par l'inégalité:

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0.$$

Dans ce cas chaque substitution du groupe ne donne plus nécessairement pour $X$ et $Y$ une valeur déterminée. Prenons en effet la substitution

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

Supposons que le système $x$, $y$ satisfasse aux deux équations

$$M_1 x + P_1 y + R_1 = 0$$
$$M_3 x + P_3 y + R_3 = 0$$

on voit que $Y$ aura une valeur infinie et que $X$ sera indéterminée.

Cette circonstance ne peut pas se présenter quand $(x, y)$ est à l'intérieur du domaine précédemment défini, parce que dans ce cas

$$\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3) > A \cdot \operatorname{mod} R_3$$

et par suite $\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3)$ n'est jamais nul.

6. Dans le groupe des substitutions à coëfficients entiers, transformant en elle-même une forme $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$, on peut considérer un sous-groupe particulièrement intéressant. L'invariant de la forme se reproduisant multiplié par le carré du module du déterminant de la substitution, ce module doit être égal à l'unité; le sous-groupe que j'ai en vue est celui pour lequel le déterminant lui-même est égal à l'unité. C'est toujours de celui-là qu'il sera question dans la suite, quand nous parlerons du groupe des substitutions transformant la forme en elle-même.

7. Arrêtons-nous un instant sur un cas particulier. Nous prenons la forme

$$xx_0 + yy_0 - zz_0$$

et nous considérons le groupe des substitutions à coëfficients entiers de la forme $a + bi$ (où $a$ et $b$ sont des entiers réels), transformant cette forme en elle-même. Soit

$$\begin{aligned} x &= M_1X + P_1Y + R_1Z \\ y &= M_2X + P_2Y + R_2Z \\ z &= M_3X + P_3Y + R_3Z \end{aligned}$$

les relations du paragraphe (3) deviennent

$$\begin{aligned} M_1\mu_1 + M_2\mu_2 - M_3\mu_3 &= 1 \\ P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 &= 1 \\ R_1\rho_1 + R_2\rho_2 - R_3\rho_3 &= -1 \\ P_1\mu_1 + P_2\mu_2 - P_3\mu_3 &= 0 \\ M_1\rho_1 + M_2\rho_2 - M_3\rho_3 &= 0 \\ P_1\rho_1 + P_2\rho_2 - P_3\rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

système qui est équivalent au suivant:

$$
(\varepsilon) \qquad
\begin{aligned}
M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\
M_2\mu_2 + P_2\pi_2 - R_2\rho_2 &= 1 \\
M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\
\mu_2 M_1 + \pi_2 P_1 - R_1\rho_2 &= 0 \\
\mu_2 M_3 + \pi_2 P_3 - R_3\rho_2 &= 0 \\
\mu_3 M_1 + \pi_3 P_1 - R_1\rho_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Nous allons encore remplacer ce système par un autre; remarquons à cet effet que les équations

$$
\begin{aligned}
\mu_2 M_1 + \pi_2 P_1 - R_1\rho_2 &= 0 \\
\mu_2 M_3 + \pi_2 P_3 - R_3\rho_2 &= 0
\end{aligned}
$$

donnent

$$
\frac{\mu_2}{-P_1R_3 + P_3R_1} = \frac{\pi_2}{-R_1M_3 + R_3M_1} = \frac{\rho_2}{M_1P_3 - M_3P_1}
$$

désignons par $s$ la valeur commune de ces rapports; en substituant ces valeurs dans la seconde des équations ($\varepsilon$), on a:

$$
s[M_2(P_3R_1 - P_1R_3) + P_2(M_1R_3 - R_1M_3) + R_2(M_3P_1 - M_1P_3)] = 1
$$

or le coëfficient de $s$ est le déterminant de la substitution, il est donc égal à $\pm 1$ ou $\pm i$. Ne considérons que le sous-groupe pour lequel ce déterminant est égal à l'unité: on aura alors $s = 1$.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= P_3R_1 - P_1R_3 \\
\pi_2 &= M_1R_3 - M_3R_1 \\
\rho_2 &= M_1P_3 - M_3P_1
\end{aligned}
$$

auquel il faut adjoindre:

$$
\begin{aligned}
M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\
M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\
\mu_3 M_1 + \pi_3 P_1 - R_1\rho_3 &= 0
\end{aligned}
$$

et de ce système de six équations on peut d'ailleurs facilement déduire

le système des équations ($\varepsilon$). On a en effet d'après les trois dernières équations:

$$-(M_1\mu_1+P_1\pi_1-R_1\rho_1)(M_3\mu_3+P_3\pi_3-R_3\rho_3)+(\mu_3M_1+\pi_3P_1-R_1\rho_3)(M_3\mu_1+P_3\pi_1-\rho_1R_3)=1$$

ce qui peut s'écrire:

$$(P_3R_1-P_1R_3)(\pi_3\rho_1-\pi_1\rho_3)+(M_1R_3-M_3R_1)(\mu_1\rho_3-\mu_3\rho_1)-(M_1P_3-M_3P_1)(\mu_1\pi_3-\mu_3\pi_1)=1$$

ou enfin

$$M_2\mu_2 + P_2\mu_2 - R_2\rho_2 = 1.$$

Quant aux autres équations ($\varepsilon$) on voit de suite qu'elles sont vérifiées. Avec cette nouvelle forme, le groupe se trouve donné par les valeurs de

$$M_1,\ P_1,\ R_1,\ M_3,\ P_3,\ R_3$$

vérifiant les équations

$$M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 = 1$$
$$M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 = -1$$
$$\mu_3M_1 + \pi_3P_1 - R_1\rho_3 = 0$$

A toute solution de ces équations correspondront des valeurs entières de $M_2$, $P_2$ et $R_2$. Je reviendrai dans un autre travail sur le groupe précédent.

8. Reprenant maintenant le cas général, *je veux montrer que l'on peut former des fonctions uniformes des deux variables $x$ et $y$, définies pour tous les systèmes de valeurs $x$ et $y$ du domaine $D$ déjà considéré, domaine défini par l'inégalité*

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

*et qui se reproduisent pour toutes les substitutions du groupe* $(M, P, R)$ c'est à dire quand on remplace $x$ et $y$ par

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}.$$

Comme je l'ai dit plus haut (paragr. 6), je considère le groupe des sub-

stitutions pour lequel le déterminant de la substitution est égal à l'unité; nous avons donc ici

$$\begin{vmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{vmatrix} = 1.$$

J'envisage le déterminant fonctionnel de $X$ et $Y$, soit $D(X, Y)$; nous allons étudier la série dont le terme général est:

$$[\operatorname{mod} D(X, Y)]^m$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe; et nous prouverons qu'à partir d'une valeur convenable de l'entier $m$, la série est convergente. Calculons d'abord ce déterminant fonctionnel, on trouve de suite:

$$D(X, Y) = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{(M_3 x + P_3 y + R_3)^3}$$

Nous avons donc à considérer la serie:

$$\frac{1}{\operatorname{mod}(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}}.$$

Pour démontrer la convergence de cette série, nous emploierons deux méthodes distinctes, l'une particulière à la nature spéciale des groupes que nous venons d'étudier, l'autre beaucoup plus générale et applicable à tout groupe discontinu, moyennant seulement quelques hypothèses sur la nature de ce groupe.

9. Pour plus de simplicité, supposons que le groupe considéré soit le groupe des substitutions à coëfficients entiers de la forme $a + bi$, transformant en elle-même la forme:

$$\alpha u u_0 + \beta v v_0 - g w w_0$$

le même raisonnement, avec quelques légères modifications seulement, serait applicable au cas général précédemment étudié.

Nous avons établi (paragr. 4) que pour un système de valeurs $x$, $y$ situé à l'intérieur du domaine $D$, on a:

$$\operatorname{mod}(M_3 x + P_3 y + R_3) > A \cdot \operatorname{mod} R_3$$

$A$ étant une constante dépendant seulement de $x$, $y$ et $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, mais nullement des $M$, $P$, $R$.

Pour une valeur donnée à $R_3$, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de substitutions appartenant au groupe (paragr. 4); cherchons une limite supérieure de ce nombre. Remarquons d'abord qu'il résulte des équations (5) et (6) (paragr. 3) qu'à une valeur donnée de $R_3$, $M_3$, $P_3$, $R_1$, $R_2$ ne peut correspondre qu'une seule substitution. Nous avons donc seulement à chercher, pour une valeur donnée de $R_3$, le nombre maximum de valeurs possibles pour le système des quatre quantités $M_3$, $P_3$, $R_1$ et $R_2$. Il nous suffira de considérer les équations:

$$\frac{M_3\mu_3}{\alpha} + \frac{P_3\pi_3}{\beta} - \frac{R_3\rho_3}{g} = -\frac{1}{g}$$

$$\alpha R_1\rho_1 + \beta R_2\rho_2 - gR_3\rho_3 = -g$$

Soit $R_3 = a + bi$ et posons

$$R_1 = m + in, \quad R_2 = p + iq$$

La seconde équation s'écrira:

$$\alpha(m^2 + n^2) + \beta(p^2 + q^2) = g(a^2 + b^2 - 1)$$

$m$ et $n$ seront certainement moindres que $\sqrt{\frac{g}{\alpha}(a^2 + b^2)}$ et $p$ sera moindre que $\sqrt{\frac{g}{\beta}(a^2 + b^2)}$; donc le nombre de systèmes de valeurs possibles pour $R_1$ et $R_2$ sera moindre que

$$(a^2 + b^2)^{\frac{2}{2}} \cdot N$$

$N$ étant une constante purement numérique, dépendant seulement de $\alpha$, $\beta$ et $g$, qu'il est inutile de fixer. Tout pareillement le nombre de systèmes de valeurs possibles pour $M_3$ et $P_3$ sera moindre que

$$(a^2 + b^2)^{\frac{2}{2}} \cdot N_1$$

donc pour la valeur $R_3 = a + bi$, une limite supérieure du nombre de substitutions entière possible dans le groupe, sera:

$$N \cdot N_1(a^2 + b^2)^2$$

Revenons maintenant à la série dont le terme général est

$$\frac{1}{\mathrm{mod}\,(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

il pourra y avoir un certain nombre de termes pour lesquels $R_3$ aura la même valeur, mais ce nombre sera moindre que $N^2(a^2 + b^2)^2$.

On a d'autre part

$$\frac{1}{\mathrm{mod}\,(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}} < \frac{1}{A^{3m}} \cdot \frac{1}{(\mathrm{mod}\,R_3)^{3m}}$$

donc la somme des termes pour lesquels $R_3$ a la même valeur, sera moindre que

$$\frac{NN_1}{A^{3m}} \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3m}{2}}}$$

la série tout entière sera donc moindre que le produit de $\frac{NN_1}{A^{3m}}$ par la série dont le terme général est:

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3m}{2}}}$$

où $a$ et $b$ reçoivent toutes les valeurs entières possibles, à l'exception de $a = 0$, $b = 0$. Or on voit facilement que pour toute valeur de $m$, égale ou supérieure à 3 cette dernière série converge. Dans le cas de $m = 3$, son terme général est en effet:

$$\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Faisant varier $a$ et $b$ depuis l'unité jusqu'à l'infini, nous prouverons la convergence de cette série en montrant que l'intégrale double

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{da\,db}{(a^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}$$

a un sens déterminé. Or cette intégrale peut s'écrire

$$\int_1^\infty \int_{\frac{1}{a}}^\infty \frac{da\,dt}{a^4(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{qui est moindre que} \quad \int_1^\infty \frac{da}{a^4} \times \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

expression dont la valeur est parfaitement déterminée.

Nous avons donc établi que la série

$$\sum \frac{1}{\operatorname{mod} (M_3 x + P_3 y + R_3)^{2m}}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente si $m$ est égal ou supérieur à trois. Notre seconde démonstration nous permettra de voir que ce résultat subsiste quand on a $m = 2$.

10. Avant d'exposer cette seconde démonstration, voyons de suite le parti que l'on peut tirer du résultat précédent pour obtenir des fonctions restant invariables pour toutes les substitutions du groupe. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de $x$ et $y$ restant uniforme et continue pour tous les points à l'intérieur ou sur la limite du domaine $D$

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

Tout polynome entier satisfait naturellement à cette condition; comme exemple d'une fonction qui ne soit pas entière citons

$$\frac{1}{a - x - y}$$

$a$ étant une quantité positive supérieure à $\frac{g(\beta + \alpha)}{\alpha\beta}$.

Formons alors la série

$$(\alpha) \qquad \sum R\left(\frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}\right) \frac{1}{(M_3 x + P_3 y + R_3)^{2m}}$$

qui est étendue à toutes les substitutions du groupe. Puisque nous avons ètabli que la série de terme général

$$\frac{1}{\operatorname{mod} (M_3 x + P_3 y + R_3)^{2m}}$$

était convergente; il s'ensuit que la série des modules des termes de la série ($\alpha$) est convergente. Nous formons donc ainsi une fonction de $x$ et $y$ uniforme et continue pour tout système de valeurs $(x, y)$ à l'intérieur

du domaine $D$; soit $P(x, y)$ cette fonction. Il est facile de voir ce que devient cette fonction quand on fait sur $(x, y)$ une substitution du groupe; chaque terme de la nouvelle série devient égal à un terme de la première, multiplié par le dénominateur des formules de substitution, élevé à la puissance $3m$.

On a donc, pour toute substitution $(M, P, R)$

$$P\left[\frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}\right] = (M_3x + P_3y + R_3)^{3m} \cdot P(x, y)$$

Ces fonctions sont, comme on le voit, les analogues des fonctions d'une variable, appelées thétafuchsiennes par M. POINCARÉ et qui jouent un rôle si important dans sa théorie des fonctions fuchsiennes.

11. Ce résultat serait illusoire si la fonction $P(x, y)$ était identiquement nulle: c'est un point qui parait peu vraisemblable, vu surtout le degré de généralité de la fonction rationnelle $R$; mais pour plus de sûreté montrons en toute rigueur, que ce résultat ne peut se présenter, quelle que soit la fonction rationnelle $R$, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier $m$. Nous raisonnerons encore, pour plus de simplicité, sur le groupe des substitutions (paragr. 9) à coëfficients entiers transformant en elle-même la forme

$$\alpha uu_0 + \beta vv_0 - \gamma ww_0$$

et il nous suffira de constater que la série:

$$\sum \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

au moins pour certaines valeurs de $m$, n'est pas nulle pour $x = 0, y = 0$. Or il y a un nombre limité $N$ de substitutions pour lesquelles on a $R_3 = \pm 1$ ou $\pm i$, et en prenant $m = 4n$, la part provenant de ces termes sera évidemment $N$. Pour tous les autres termes le module de $R_3$ sera supérieur à l'unité; chaque terme sera très-petit si $n$ est suffisamment grand et par conséquent leur somme, puisque nous savons que la série est convergente; la série différera donc peu de $N$ et par conséquent ne sera pas nulle. Nous sommes donc assuré que la série précédente ne

peut pas toujours être identiquement nulle, et alors il en est évidemment de même de la série ($\alpha$) précédemment formée.

12. La connaissance des fonctions $P(x, y)$ conduit immédiatement à la formation de fonctions se reproduisant pour toutes les substitutions du groupe. Prend on en effet deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ correspondant à la même valeur de $m$; on a, en posant

$$F(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

$$F\left(\frac{M_1x + P_1y + Q_1}{M_3x + P_3y + Q_3}, \frac{M_2x + P_2y + Q_2}{M_3x + P_3y + Q_3}\right) = F(x, y)$$

*Il existe donc des fonctions uniformes des deux variables indépendantes $x$ et $y$, définies dans le domaine $D$ et se reproduisant quand on effectue sur $x$ et $y$ toutes les substitutions du groupe $(M, P, R)$.*

13. J'arrive maintenant à la seconde démonstration que j'ai annoncée pour la convergence de la série:

$$\sum \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

Cette démonstration ne s'applique pas seulement aux groupes dont nous nous sommes occupés dans cette étude, mais à tout groupe discontinu jouissant des propriétés suivantes.

Considérons le domaine $D$ limité par la relation

$$x'^2 + x''^2 + y'^2 + y''^2 = 1$$

et désignons encore par:

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

une substitution quelconque du groupe proposé. Nous supposons d'abord qu'à tout point $(x, y)$ sur la limite du domaine [j'appelle, pour abréger, point-$(x, y)$ l'ensemble des valeurs $x$ et $y$] correspond un point de cette même limite ce qui nous donne les relations

$$M_1\mu_1 + M_2\mu_2 - M_3\mu_3 = P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = -(R_1\rho_1 + R_2\rho_2 - R_3\rho_3)$$

$$P_1\mu_1 + P_2\mu_2 - P_3\mu_3 = 0$$

$$M_1\rho_1 + M_2\rho_2 - M_3\rho_3 = 0$$

$$P_1\rho_1 + P_2\rho_2 - P_3\rho_3 = 0$$

où, comme précédemment, les lettres grecques sont les conjuguées des grandes lettres correspondantes. Nous supposerons de plus que le déterminant $(M, P, R)$ de la substitution soit égal à l'unité. Or désignons par $k$ la valeur commune, nécessairement réelle, des trois expressions sur la première ligne, on tire des autres équations:

$$\frac{P_1}{-\mu_2\rho_3 + \mu_3\rho_2} = \frac{P_2}{-\rho_1\mu_3 + \rho_3\mu_1} = \frac{P_3}{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1} = s$$

et en substituant dans la relation

$$P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = k$$

on aura, en tenant compte de ce que le déterminant est supposé égal à l'unité

$$s = k$$

donc

$$P_1 = k(\mu_3\rho_2 - \mu_2\rho_3)$$

$$P_2 = k(\mu_1\rho_3 - \mu_3\rho_1)$$

$$P_3 = k(\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1)$$

et de même on trouverait:

$$M_1 = k(\pi_2\rho_3 - \pi_3\rho_2), \quad R_1 = k(\pi_2\mu_3 - \mu_2\pi_3)$$

$$M_2 = k(\pi_3\rho_1 - \pi_1\rho_3), \quad R_2 = k(\mu_1\pi_3 - \pi_1\mu_3)$$

$$M_3 = k(\pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2), \quad R_3 = k(\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1)$$

d'où on conclut en portans lct valeurs des $M$ et $R$ dans les expressions des $P$

$$P_1 = k^3P_1, \quad P_2 = k^3P_2, \quad P_3 = k^3P_3$$

on en conclut que $k^3 = 1$ et par suite $k = 1$.

Les relations entre les $M$, $P$, $R$ ont donc absolument la même forme

que celles que nous avons considéré au paragraphe (7). Seulement dans ce dernier les $M$, $P$, $R$ représentaient des entiers complexes, tandis qu'ici nous ne savons rien sur ces constantes.

D'après la forme de ces équations, une substitution quelconque du groupe transformera un point du domaine $D$ en un point du même domaine. Nous supposons enfin que le groupe est discontinu pour tous les points à l'intérieur de $D$, et voici ce que nous entendons par là: $x$, $y$ étant un point quelconque à l'intérieur de $D$ et $D_1$ étant un domaine quelconque comprenant ce point mais compris lui-même tout entier dans $D$, les transformations du groupe effectuées sur $(x, y)$ ne donneront qu'un nombre limité de points à l'intérieur de $D_1$; par suite quand on effectue sur $(x, y)$ toutes les transformations du groupe, les valeurs transformées tendent vers la limite du domaine $D$.

Considérons le dénominateur

$$M_3x + P_3y + R_3$$

on a

$$\operatorname{mod}(M_3x + P_3y + R_3) = \operatorname{mod} R_3 \cdot \operatorname{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right)$$

or nous avons les relations [relations (ε) du paragr. 7]

$$\begin{aligned}
M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\
M_2\mu_2 + P_2\pi_2 - R_2\rho_2 &= 1 \\
M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\
\mu_2 M_1 + \pi_2 P_1 - R_1\rho_2 &= 0 \\
\mu_2 M_3 + \pi_2 P_3 - R_3\rho_2 &= 0 \\
\mu_3 M_1 + \pi_3 P_1 - R_1\rho_3 &= 0
\end{aligned}$$

on voit donc que $\operatorname{mod} R_3 \geqq 1$ et

$$\operatorname{mod}^2\frac{M_3}{R_3} + \operatorname{mod}^2\frac{P_3}{R_3} = 1 - \frac{1}{\operatorname{mod}^2 R_3}$$

$\operatorname{mod}\frac{M_3}{R_3}$ et $\operatorname{mod}\frac{P_3}{R_3}$ sont donc moindres que un et pour un point $(x, y)$ à l'intérieur de $D$, on a

$$\mathrm{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right) < 3$$

On peut trouver une limite inférieure de la même quantité, en suivant la voie du paragr. (4); on a ainsi

$$\mathrm{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right) >$$

$$> \frac{(1-\mathrm{mod}^2 x)\mathrm{mod}^2\frac{M_3}{R_3} + (1-\mathrm{mod}^2 y)\mathrm{mod}^2\frac{P_3}{R_3} - 2\mathrm{mod}\,x\cdot\mathrm{mod}\,y\cdot\mathrm{mod}\frac{M_3}{R_3}\cdot\mathrm{mod}\frac{P_3}{R_3} + \frac{1}{\mathrm{mod}^2 R_3}}{1 + \mathrm{mod}\,x\cdot\mathrm{mod}\frac{M_3}{R_3} + \mathrm{mod}\,y\cdot\mathrm{mod}\frac{P_3}{R_3}}$$

et par suite

$$\mathrm{mod}\left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1\right) > \frac{1 - \mathrm{mod}^2 x - \mathrm{mod}^2 y}{3(1 - \mathrm{mod}^2 x)}$$

Ecrivons donc

$$\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3) = A \cdot \mathrm{mod}\,R_3$$

$A$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{1 - \mathrm{mod}^2 x - \mathrm{mod}^2 y}{3(1 - \mathrm{mod}^2 x)} < A < 3$$

Ceci posé, soit $x_0$, $y_0$ un point tel que la substitution unité soit la seule qui le transforme en lui-même (c'est évidemment ce qui arrive pour un point pris arbitrairement), et envisageons la série $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, .... des points transformés de $(x_0, y_0)$ par les substitutions du groupe. Je trace autour du point $(x_0, y_0)$ un petit domaine: soit pour fixer les idées

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (x'' - x''_0)^2 + (y'' - y''_0)^2 = \varepsilon^2,$$

ou $\varepsilon$ est une quantité très-petite, la limite de ce domaine que nous appellerons $\delta_0$. Les substitutions transformeront le domaine $\delta_0$ en une série de domaines $\delta_1$, $\delta_2$, .... autour des points $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, .... Le groupe étant discontinu, il est clair que l'on pourra prendre $\varepsilon$ suffisamment petit pour que tous ces domaines soient extérieurs les uns aux

autres; supposons donc $\varepsilon$ ainsi choisi. Considérons alors l'intégrale quadruple:

$$\int\int\int\int dx'\, dx''\, dy'\, dy''$$

étendue à chacun des domaines $\delta_0$, $\delta_1$, ....; la somme de toutes ces intégrales aura une valeur finie, car elle est évidemment moindre que la valeur de l'intégrale précédente étendue au domaine $D$ tout entier. Or soit l'intégrale

$$\int\int\int\int dX'\, dX''\, dY'\, dY''$$

étendue au domaine $\delta$ transformée de $\delta_0$ par la substitution:

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \qquad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

on voit, par un calcul bien simple, que l'intégrale précédente est égale à l'intégrale

$$\int\int\int\int \frac{dx'\, dx''\, dy'\, dy''}{\mathrm{mod}^2 (M_3 x + P_3 y + R_3)^3}$$

étendue au domaine $\delta_0$; de cette manière toutes les intégrales se trouvent ramenées à ce domaine. Le terme général de la série sera donc

$$\frac{1}{\mathrm{mod}^2 R^3_3} \cdot \int\int\int\int \frac{dx'\, dx''\, dy'\, dy''}{A^6}.$$

Or d'après les limites données à l'instant pour $A$, cette dernière intégrale quadruple sera comprise entre deux limites, la limite inférieure étant une quantité différente de zéro, et on conclut que la série de terme général

$$\frac{1}{\mathrm{mod}^2 R^3_3}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente. Il en résulte immédiatement que la série de terme général

$$\frac{1}{\mathrm{mod}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}}$$

est convergente, $m$ étant supérieur ou égal à deux, puisque l'on a

$$\mathrm{mod}\,(M_3x + P_3y + R_3) = A\,\mathrm{mod}\,R_3$$

$A$ étant limité, comme il a été indiqué plus haut.

On voit donc que pour tous les groupes discontinus jouissant des propriétés énoncées, il existe des fonctions qui restent invariables pour toutes les substitutions de ces groupes.

Paris, le 28 décembre 1882.

---

# UEBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN

VON

L. FUCHS

IN HEIDELBERG.

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung *ersten* Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen *höheren* Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die $m^{te}$, so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m-2$ sei. — Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden habe ich die Lösung dieses Problems für die Differentialgleichungen dritter Ordnung durchgeführt. Für diese kann es nur *eine* Relation der genannten Art geben. Bemerkenswerth sind die Anwendungen, welche wir bei unserer Untersuchung von der Theorie der Abelschen Integrale haben machen können.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraïsch integrirbar sind, zu der Classe von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

Wir haben in der folgenden Arbeit auch eine Reihe von Sätzen über algebraïsch integrirbare lineare Differentialgleichungen aufgestellt, von

welchen wir in derselben Arbeit Gebrauch machen, die aber auch anderweitige Anwendungen zulassen.

Die Resultate dieser Arbeit habe ich in der auch gegenwärtig festgehaltenen Reihenfolge bereits in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 8 Juni 1882, veröffentlicht.

## 1.

Es sei

$$\frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0 \tag{A}$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in $z$ rationalen Coefficienten, gehörig zu der Classe von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (Borchardt's Journal für Mathem. B. 66 S. 146 Gl. 12) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A) $y_1$, $y_2$, $y_3$ eine irreductible Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0 \tag{B}$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function $n^{ten}$ Grades von $y_1$, $y_2$, $y_3$ bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die Hessische Covariante von $f$, so ist $H(f)$ nicht identisch Null, da der Voraussetzung nach $f$ nicht in lineare Factoren zerlegbar ist. (1)

Ein beliebiger Umlauf von $z$ führe $y_x$ über in

$$y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3 \qquad (x = 1, 2, 3) \tag{1}$$

so geht $f$, folglich auch $H(f)$ durch denselben Umlauf in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt über. Demnach ist $\frac{d\log H(f)}{dz}$ eine eindeutige Function von $z$. Da ausserdem der vorausgesetzten Natur der

(1) Vergl. Gordan und Nöther, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen 13 Dec. 1875, 10 Jan. 1876.

Integrale der Gleichung (A) wegen diese Function für jeden im Endlichen gelegenen Punct $p$ in der $z$-Ebene mit einer bestimmten Potenz von $z-p$, und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist dieselbe eine rationale Function. Da $H(f)$ ebenfalls für jeden im Endlichen befindlichen Punkt $p$ mit einer bestimmten Potenz von $z-p$ und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist demnach

$$H(f) = X(z) \tag{2}$$

Wurzel einer rationalen Function von $z$.

Setzen wir

$$\frac{y_2}{y_1} = \eta, \qquad \frac{y_3}{y_1} = \zeta \tag{3}$$

$$H(f) = y_1^{3n-6} \cdot H_1(\eta, \zeta)$$

so verwandelt sich die Gl. (2) in

$$\left[y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}\right]^{3n-6} \cdot H_1(\eta, \zeta) = 1 \tag{4}$$

Ist $z$ ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A) für $z=z_1$ je einen gleichen Werth an wie für $z=z$, so folgt aus der Gleichung (4), dass auf denselben Wegen $y_1 \,.\, X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ in $z_1$ einen Werth annimmt, welcher aus dem für $z$ durch Multiplication mit einer Einheitswurzel $\lambda$ hervorgeht. Da jeder Quotient zweier Integrale für $z=z_1$ denselben Werth wie für $z$ annimmt, so folgt, dass auch $y_2 \,.\, X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$, $y_3 \,.\, X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ für $z=z_1$ Werthe annehmen, welche aus denen für $z$ durch Multiplication mit $\lambda$ hervorgehen.

Substituirt man daher in (A)

$$y = X(z)^{\frac{1}{3n-6}} \cdot v,$$

wodurch dieselbe in

$$\frac{d^3v}{dz^3} + p' \cdot \frac{d^2v}{dz^2} + q' \cdot \frac{dv}{dz} + r'v = 0 \tag{A'}$$

übergehen möge, so hat das $y_1, y_2, y_3$ entsprechende Fundamentalsystem von Integralen $v_1, v_2, v_3$ der Gleichung (A′) die Eigenschaft für $z = z_1$ Werthe anzunehmen, welche aus denen für $z$ durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel $\lambda$ hervorgehen.

Zwischen $v_1, v_2, v_3$ findet die Gleichung

$$\text{(B}'\text{)} \qquad f(v_1, v_2, v_3) = 0$$

statt.

Sei

$$v_1 = \varphi_1(z), \qquad v_2 = \varphi_2(z), \qquad v_3 = \varphi_3(z),$$

so ist der Voraussetzung gemäss, wenn man von $z$ auf geeigneten Wegen nach $z_1$ geht,

$$(5) \qquad \varphi_x(z_1) = \lambda \cdot \varphi_x(z), \qquad x = 1, 2, 3,$$

wo $\lambda$ eine Einheitswurzel bedeutet.

Die Functionen $\varphi_x(z_1)$ genügen der Gleichung

$$(6) \qquad \frac{d^3 v}{dz_1^3} + p'(z_1)\frac{d^2 v}{dz_1^2} + q'(z_1)\frac{dv}{dz_1} + r'(z_1)\,v = 0$$

Es sei

$$z = \psi(z_1), \qquad \frac{d^i z}{dz_1^i} = \psi^{(i)}(z_1).$$

Transformirt man Gl. (6) in die unabhängige Variable $z$, so folgt

$$\text{(6 a)} \quad \frac{d^3 v}{dz^3}\psi'^3 + [3\psi' \cdot \psi'' + p'(z_1)\psi'^2]\frac{d^2 v}{dz^2} + [\psi^{(3)} + p'(z_1)\psi^{(2)} + q'(z_1)\psi']\frac{dv}{dz} + r'(z_1)v = 0$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\psi'^3$, so muss dieselbe wegen Gleichung (5) mit Gleichung (A′) übereinstimmen. Man erhält also

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{3\psi^{(2)}}{\psi'^2} + \frac{p'(z_1)}{\psi'} &= p'(z) \\ \frac{\psi^{(3)}}{\psi'^3} + p'(z_1)\frac{\psi^{(2)}}{\psi'^3} + \frac{q'(z_1)}{\psi'^2} &= q'(z) \\ \frac{r'(z_1)}{\psi'^3} &= r'(z) \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$(8)\qquad \psi'^3 = C \cdot \frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)},$$

wo

$$(9)\qquad \Delta'(z) = e^{-\int p'(z)dz}$$

gesetzt ist, und $C$ eine Constante bedeutet. Diese Constante ist von Null verschieden, da $\psi'$ nicht identisch verschwinden darf.

Aus der letzten der Gleichungen (7) und aus Gleichung (8) erhält man

$$(10)\qquad r'(z_1) = C \cdot \frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)} \cdot r'(z)$$

Aus den Gleichungen (7) ergiebt sich ferner

$$(11)\qquad \left[q'(z) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 \cdot \frac{C^2}{\Delta'(z)^2} =$$
$$= \left[q'(z_1) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z_1)}{dz_1} - \frac{2}{9}p'(z_1)^2\right]^3 \cdot \frac{1}{\Delta'(z_1)^2}$$

Da der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A) gemäss $\Delta'$ Wurzel einer rationalen Function ist, so findet demnach nach Gleichung (10) oder (11) zwischen $z$ und $z_1$ eine algebraische Gleichung statt, *wenn nicht*

$$(12)\qquad \left[q'(z) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 = C'.\,\Delta'(z)^2$$

und zugleich

$$(13)\qquad r'(z) = C'' \cdot \Delta'(z),$$

wo $C'$ und $C''$ Constanten bedeuten.

Nach Gl. (9) ist

$$(14)\qquad p'(z) = -\frac{d \log \Delta'(z)}{dz}$$

und aus Gl. (12) ergiebt sich

$$(15)\qquad q'(z) = -\frac{1}{3}\frac{d^2 \log \Delta'}{dz^2} + \frac{2}{9}\left(\frac{d \log \Delta'}{dz}\right)^2 + \gamma \cdot \Delta'^{\frac{2}{3}}$$

wo $\gamma$ eine Constante bedeutet.

Setzt man

(16) $$\frac{d \log v}{dz} = \omega,$$

so folgt aus Gleichung (A')

(17) $$\frac{d^2\omega}{dz^2} + 3\frac{d\omega}{dz} \cdot \omega + \omega^3 + p'(z)\left[\frac{d\omega}{dz} + \omega^2\right] + q'(z) \cdot \omega + r'(z) = 0$$

Die Gleichung (17) wird aber, unter der Voraussetzung dass $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ die durch die Gleichungen (14), (15), (13) gegebenen Werthe haben, befriedigt durch

(18) $$\omega = \mu \cdot \Delta'(z)^{\frac{1}{3}}$$

wo $\mu$ eine Wurzel der Gleichung

(19) $$\mu^2 + \gamma \cdot \mu + C'' = 0$$

Ist $C'' = 0$, so ist nach Gl. (13) $r'(z) = 0$.

In diesem Falle wird die Gleichung (A') befriedigt durch

$$v_1 = \int \Delta'^{\frac{1}{3}}(z) dz$$

Ein zweites Integral $v_2$ ergiebt sich

$$v_2 = v_1^2 + \text{Const.}$$

Da ein drittes Integral $v_3 = 1$ genügt, so findet also in diesem Falle zwischen $v_1$, $v_2$, $v_3$ die Gleichung zweiten Grades

$$v_2 v_3 = v_1^2 + \text{Const. } v_3^2$$

statt.

Es kann $\Delta'(z)$ nicht constant sein, da sonst nach den Gleichungen (13), (14), (15) $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ constant wären, die Gleichung (A') also durch eine Function der Form $e^{xz}$ befriedigt würde, wo $x$ constant; dieses widerspricht aber der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A). Es muss demnach $\Delta'$ für einen singulären Punkt $a$ der Gleichung (A') oder für $z = \infty$ unendlich werden. Es wird aber die logarithmische Ableitung eines Integrals $v$ der Gl. (A') nicht unendlich für $z = \infty$.

Wenn demnach $C''$ von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung (18) dass $\Delta'(z)$ nur für die singulären Punkte $a$ der Gl. (A′) unendlich werden kann. Nun aber ist $\omega(z-a) = (z-a)\,\dfrac{d\log v}{dz}$ für $z=a$ gleich einer rationalen Zahl.

Es sei daher in der Umgebung von $z=a$

$$\Delta'(z)^{\frac{1}{3}} = a_0(z-a)^{-1} + \ldots .$$

alsdann muss nach Gleichung (18), $\mu\alpha_0$ eine rationale Zahl sein. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass $\gamma$ nicht verschwinden darf, da sonst gleichzeitig $\mu\alpha_0$, $\mu\varepsilon\alpha_0$, $\mu\varepsilon^2\alpha_0$ rationale Zahlen sein müssten, wenn $\mu$ eine der Wurzeln der Gleichung $\mu^3 + C'' = 0$, $\varepsilon$ eine primitive dritte Wurzel der Einheit bezeichnet; was nicht möglich ist.

Es ergiebt sich daher aus den Gll. (12), (13)

$$(20) \qquad r'(z) = g(z)^3,$$

wo $g(z)$ eine rationale Function von $z$ bedeutet.

Der vorausgesetzten Natur der Gl. (A) zu Folge ist in der Umgebung eines singulären Punktes $a$ der Gleichung (A′)

$$r'(z) = \frac{\zeta_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{\zeta_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{\zeta_{-1}}{(z-a)} + \zeta_0 + \zeta_1(z-a) + \ldots .$$

folglich ist, wenn $a_1, a_2, \ldots . a_\varkappa$ die Gesammtheit der singulären Punkte der Gleichung (A′) bedeuten,

$$r'(z)(z-a_1)^3(z-a_2)^3 \cdots (z-a_\varkappa)^3 = h(z)^3$$

wo $h(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet.

Aus demselben Grunde muss in der Umgebung von $z=\infty$

$$r'(z) = \frac{\eta_3}{z^3} + \frac{\eta_4}{z^4} + \cdots$$

sein.

Also ist $r'(z)\,.\,z^3$ für $z=\infty$ nicht unendlich, und demnach $h(z)$ höchstens vom Grade $\varkappa - 1$, also

$$(21) \qquad g(z) = \frac{h(z)}{(z-a_1)\cdots(z-a_\varkappa)} = \frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa}$$

Aus den Gleichungen (13), (20), (21), (18) folgt demnach

$$\omega = \frac{\mu}{C''^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_x}{z-a_x}\right]$$

Aus dem oben Bemerkten ergiebt sich dass $\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{2}}} \cdot \varepsilon_i$ rationale Zahlen sind, und demnach

(22)
$$v = \left[(z-a_1)^{\varepsilon_1}(z-a_2)^{\varepsilon_2}\cdots(z-a_x)^{\varepsilon_x}\right]^{\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{2}}}}$$

eine Wurzel einer rationalen Function darstellt.

Von den Wurzeln der Gleichung (19) sind wenigstens zwei $\mu_1$, $\mu_2$ von einander verschieden. Setzt man in (22) $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$, so erhält man zwei Integrale von (A′) $v_1$, $v_2$, deren Quotient nicht constant. Substituirt man $v_1$, $v_2$ in Gl. (B′), so folgt, dass auch $v_3$ eine algebraïsche Function von $z$ wird.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen folgt, dass die Gleichungen (12) und (13) nur stattfinden dürfen, wenn entweder $n = 2$ oder die Gleichung (A) algebraïsch integrirbar ist.

Wir fanden oben, dass wenn die Gleichungen (12) und (13) nicht bestehen, zwischen $z$ und $z_1$ eine algebraïsche Gleichung stattfindet. Ist daher $\eta$ gegeben, so folgen aus Gl. (B) für $\zeta$ $n$ Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$. Den $n$ Werthepaaren $(\eta, \zeta_1), (\eta, \zeta_2), \ldots (\eta, \zeta_n)$ entspricht demnach nur eine endliche Anzahl von Werthen $z$, d. h.

*Einem gegebenen Werthe von $\eta$ entspricht nur eine endliche Anzahl von Werthen $z$.* Es findet also eine Gleichung der Form

(23)
$$z^l + A_1 z^{l-1} + \cdots + A_l = 0$$

statt, wo $A_1, A_2, \ldots A_l$ eindeutige Functionen von $\eta$ sind.

Setzt man in Gl. (A)

$$y = y_1 \int \omega dz,$$

so erhält man

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{3d\log y_1}{dz} + p\right)\frac{d\omega}{dz} + \left[\frac{3}{y_1}\frac{d^2y_1}{dz^2} + 2p\frac{d\log y_1}{dz} + q\right]\omega = 0$$

Von dieser Gleichung bilden $\frac{d\eta}{dz}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ ein Fundamentalsystem von Integralen. Es ist also [1]

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = \frac{\varDelta}{y_1^2},$$

wo

$$\varDelta = \sum \pm\, y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2y_3}{dz^2} = e^{-\int p dz}$$

oder

(24)
$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\varDelta}{y_1^3}$$

Durch die Substitution (3) gehe (B) in

(B″)
$$F(\eta,\ \zeta) = 0$$

über. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}$ als rationale Function von $\eta$ und $\zeta$

(25)
$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = G(\eta,\ \zeta)$$

Aus Gleichung (4) folgt

(26)
$$y_1 = \sqrt[3n-6]{\frac{X(z)}{H_1(\eta,\ \zeta)}}$$

Also ergiebt Gl. (24)

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\sqrt[3]{\varDelta}}{\sqrt[3n-6]{X(z)}} \cdot \frac{\sqrt[3n-6]{H_1(\eta,\ \zeta)}}{\sqrt[3]{G(\eta,\ \zeta)}}$$

oder

(27)
$$\sqrt[3n-6]{\frac{\varDelta^{n-2}}{X(z)}} \cdot dz = \sqrt[3n-6]{\frac{G(\eta,\ \zeta)^{n-2}}{H_1(\eta,\ \zeta)}}\, d\eta$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass wenn $\eta$ in einen willkürlichen Werth $\beta$ einrückt, und $b$ einen zugehörigen Werth von $z$ bedeutet, in der Umgebung dieser Werthe zwischen $z$ und $\eta$ eine Gleichung besteht der Form

---

[1] S. meine Abh. B. 66 des Borch. Journ. p. 123

$$\sum_{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}}(z-a)^{\frac{\mathfrak{a}}{\alpha}} = \sum_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}(\eta-\beta)^{\frac{\mathfrak{a}}{\beta}}, \tag{28}$$

wo $\alpha$, $\beta$ positive ganze Zahlen bedeuten, und wo die unendlichen Reihen auf beiden Seiten nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber bekanntlich $z-b$ dargestellt durch eine nach Potenzen von $(\eta-\beta)^{\frac{1}{\gamma}}$ fortschreitende Reihe, mit nur einer endlichen Anzahl negativer Potenzen dieser Grösse, wo $\gamma$ eine positive ganze Zahl bedeutet. Daher kann $z$ als Function von $\eta$ nicht wesentlich singuläre Punkte besitzen. Derselbe Schluss gilt auch, wenn $\eta=\infty$ oder $z=\infty$ wird. In der Gleichung (23) sind demnach die Coefficienten *rationale* Functionen von $\eta$.

Es ist also $\eta$, folglich auch $\zeta$ eine algebraische Function von $z$, und die Gleichung (26) ergiebt, dass $y_1$ die gleiche Eigenschaft besitzt.

Die vorhergehenden Schlüsse sind nur in dem Falle nicht zulässig, dass $n=2$, weil alsdann $H(f)$ constant, und daher die Gleichung (4) nicht existirt.

Man erhält also den Satz:

*Findet zwischen den Integralen der Gleichung* (A) *eine Gleichung* (B) *höheren als zweiten Grades statt, so ist die Gleichung* (A) *algebraisch integrirbar.*

## 2.

Bezeichnen wir mit $u_1$, $u_2$, $u_3$ das $y_1$, $y_2$, $y_3$ entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$\frac{d^3u}{dz^3}-\frac{d^2(pu)}{dz^2}+\frac{d(qu)}{dz}-ru=0$$

derart dass

$$u_1=\left(y_2\frac{dy_3}{dz}-y_3\frac{dy_2}{dz}\right)\frac{1}{\Delta}$$

$$u_2=\left(y_3\frac{dy_1}{dz}-y_1\frac{dy_3}{dz}\right)\frac{1}{\Delta}$$

$$u_3=\left(y_1\frac{dy_2}{dz}-y_2\frac{dy_1}{dz}\right)\frac{1}{\Delta}\text{ [1]}$$

---

[1] Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTS Journ. B. 76, S. 183, und eine Arbeit des Herrn FROBENIUS in demselben Journ. B. 77, S. 245.

so folgt aus den Gleichungen

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3}\cdot y_3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y_3}\frac{dy_3}{dz} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{d^2y_1}{dz^2} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{d^2y_2}{dz^2} + \frac{\partial f}{\partial y_3}\frac{d^2y_3}{dz^2} = M \end{cases}$$

wo

$$M = -\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\left(\frac{dy_2}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}\left(\frac{dy_3}{dz}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3}\frac{dy_2}{dz}\frac{dy_3}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1}\frac{dy_3}{dz}\frac{dy_1}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{dy_1}{dz}\frac{dy_2}{dz} \right\}$$

$$(C) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = M\cdot u_\varkappa, \qquad \varkappa = 1,\ 2,\ 3.$$

Es sei allgemein $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function der Variablen $y_1, y_2, y_3$, welche durch die Substitution

$$(2) \qquad \alpha_{\varkappa 1}y_1 + \alpha_{\varkappa 2}y_2 + \alpha_{\varkappa 3}y_3 \text{ für } y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ 3)$$

in $j\Phi$ übergeführt wird, wo $j$ eine von $y_1, y_2, y_3$ unabhängige Grösse, und bezeichnet man mit $\Phi', \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}\right)'$ das was aus $\Phi$ resp. $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}$ nach Ausübung der Substitution (2) wird, so folgt aus der Gleichung

$$(3) \qquad \Phi' = j\Phi$$

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}\right)' = j\left[\beta_{\varkappa 1}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \beta_{\varkappa 2}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \beta_{\varkappa 3}\frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\right], \qquad \varkappa = 1,\ 2,\ 3$$

wo $\beta_{\varkappa\iota}$ die Elemente der zu (2) inversen Substitution bedeuten.

Irgend einem Umlaufe von $z$ möge nun die auf $y_1, y_2, y_3$, wenn diese Grössen wieder die Integrale der Gleichung (A) bedeuten, ausgeübte Substitution (2) entsprechen, so ist:

$$(5) \qquad f(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \cdots) = f' = jf(y_1, y_2, y_3),$$

wo $j$ eine Constante. Dieses ergiebt sich daraus dass die Function $f'$ mit der Function $f$ wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung

(B) einen gemeinschaftlichen von $f$ verschiedenen Factor nicht besitzen kann, während $y_1$, $y_2$, $y_3$ der Gleichung $f' = 0$ genügen müssen. Wenn demnach diese Functionen nicht bis auf einen constanten Factor identisch wären, so würden die beiden Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$ constante Werthe der Verhältnisse $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3}{y_1}$ liefern, was nicht möglich ist.

Da die Gleichung (5) also erfüllt ist, so kann man in Gl. (4) $\Phi = f$ setzen. Andererseits geht durch denselben Umlauf von $z$ $u_x$ in

$$\beta_{x1}u_1 + \beta_{x2}u_2 + \beta_{x3}u_3, \qquad x = 1, 2, 3$$

über. Demnach führt die Gleichung (4) für $\Phi = f$ zu dem Schlusse, dass $M$ durch den genannten Umlauf von $z$ in $jM$ übergeht. Hieraus ergiebt sich wie für $H(f)$ in vor. N:o

*dass $M$ Wurzel einer rationalen Function von $z$ ist.*

*Ist insbesondere $n = 2$*, so ist $\frac{\partial f}{\partial y_x}$ als lineare homogene Function von $y_1$, $y_2$, $y_3$, Integral der Gleichung (A). Es muss demnach, wenn man in (A) die Substitution

(6) $$y = Mu$$

ausführt, die resultirende Differentialgleichung mit der adjungirten zur Gleichung (A) übereinstimmen. Dieses drückt sich durch die Gleichungen

$$\frac{3M' + pM}{M} = -p$$

$$\frac{3M^{(2)} + 2pM' + qM}{M} = -2p' + q$$

$$\frac{M^{(3)} + pM^{(2)} + qM' + rM}{M} = -p^{(2)} + q' - r,$$

aus, wo die oberen Accente Ableitungen andeuten.

Von diesen liefert die erste

(7) $$M = e^{-\frac{2}{3}\int p\,dz}$$

Die zweite wird durch die Gleichung (7) von selbst erfüllt, während die dritte unter Anwendung der Gleichung (7) übergeht in:

(8) $$2r = -\tfrac{1}{3}p^{(2)} - \tfrac{2}{3}pp' - \tfrac{4}{27}p^3 + \tfrac{2}{3}pq + q'$$

Findet umgekehrt diese Gleichung statt, und wählt man $M$ der Gleichung (7) gemäss, so ist die durch die Substitution (6) aus (A) entstehende Gleichung mit ihrer adjungirten identisch, und es folgt aus der Gleichung

$$y_x = Mu_x$$

(9) $$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

*Demnach ist die Gleichung (8) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dass zwischen $y_1$, $y_2$, $y_3$ eine homogene Gleichung zweiten Grades besteht.*

Bestimmt man zwei Functionen $p_1$, $p_0$ aus den Gleichungen

(10) $$3p_1 = p, \qquad 2p_1^2 + p'_1 + 4p_0 = q,$$

wo

$$p'_1 = \frac{dp_1}{dz},$$

so folgt aus Gleichung (8)

(11) $$r = 4p_0p_1 + 2p'_0,$$

wo

$$p'_0 = \frac{dp_0}{dz}.$$

Die Gleichung (A) ist also in diesem Falle übereinstimmend mit

(12) $$\frac{d^3y}{dz^3} + 3p_1\frac{d^2y}{dz^2} + (2p_1^2 + p'_1 + 4p_0)\frac{dy}{dz} + (4p_0p_1 + 2p'_0)y = 0$$

Bestimmt man aber die Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gl.:

(13) $$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} + p_0y = 0$$

genügt, so ergiebt sich ebenfalls die Gl. (12).

*Ist demnach $n = 2$, so ist die Gleichung (A) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (13) genügt.* [1]

---

[1] Nach dem Ercheinen meines obengenannten Aufsatzes in den Sitzungsber. der Akad. 8 Juni 1882 machte mich Herr BRIOSCHI durch ein Schreiben vom 22 Juli des-

## 3.

Es seien die sämmtlichen Integrale der Gleichung

$$\frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)y = 0 \tag{1}$$

mit rationalen Coefficienten, algebraïsch. Ferner werde vorausgesetzt, dass für einen willkürlichen Werth von $z$ jeder Quotient zweier Integrale von (1) auf geeigneten Wegen in $z_1$ denselben Werth annehme wie in $z$. Alsdann muss das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf denselben Wegen in $vy_1, vy_2, \ldots vy_m$ übergehen, wo $v$ eine bestimmte Function von $z$.

Es möge

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürliche Constanten, der irreductiblen Gleichung

$$y^r + \varphi_1(z)y^{r-1} + \cdots + \varphi_r(z) = 0 \tag{2}$$

genügen, wo $\varphi_x(z)$ rationale Function von $z$. Dann ist der Voraussetzung gemäss

$$v^r y^r + \varphi_1(z_1)v^{r-1}y^{r-1} + \cdots + \varphi_r(z_1) = 0$$

oder

$$y^r + \frac{\varphi_1(z_1)}{v}\cdot y^{r-1} + \cdots + \frac{\varphi_r(z_1)}{v^r} = 0 \tag{3}$$

Die Wurzeln der Gleichungen (2) und (3) sind übereinstimmend. Ist daher $\varphi_i(z)$ der erste Coefficient in (2) welcher nicht identisch verschwindet, so ist

$$\varphi_i(z) = \frac{\varphi_i(z_1)}{v^i}$$

---

selben Jahres auf eine in dem Bulletin de la société mathématique de France t. VII 1879 enthaltene Notiz aufmerksam, worin Herr Brioschi auf einem von dem unsrigen verschiedenen Wege die Bedingungen herleitet, unter welchen eine Differentialgleichung dritter Ordnung durch die Quadrate der Integrale einer Diffg. zweiter Ordnung befriedigt wird. In derselben Notiz leitet Herr Brioschi auch die Bedingungen ab, dafür dass einer Gleichung vierter Ordnung die Cuben der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung genügen.

oder

(4) $$v^i = \frac{\varphi_i(z_1)}{\varphi_i(z)}$$

Also ist, wenn man setzt

$$y = F(z)$$

$$\frac{F(z_1)^i}{\varphi_i(z_1)} = \frac{F(z)^i}{\varphi_i(z)}$$

oder

(5) $$\left[\frac{F(z_1)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z_1)}}\right]^i = \left[\frac{F(z)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z)}}\right]^i$$

I. *Setzt man also*

(6) $$y = \sqrt[i]{\varphi_i(z)} \cdot \omega$$

*so genügt* $\omega$ *einer linearen homogenen Differentialgleichung* $m^{ter}$ *Ordnung mit rationalen Coefficienten*

(7) $$\frac{d^m\omega}{dz^m} + g_1(z)\frac{d^{m-1}\omega}{dz^{m-1}} + \cdots + g_m(z)\omega = 0,$$

*deren Integrale für* $z_1$ *auf geeigneten Wegen Werthe annehmen, welche sich von denen in* $z$ *nur um eine und dieselbe Einheitswurzel als Factor unterscheiden.*

*Sind* $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ *genau die sämmtlichen Werthe, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (1) oder was dasselbe ist der Gleichung (7) in* $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ *je einen gleichen Werth annimmt wie in* $z$, *so erhält ein willkürliches Integral der Gleichung (7) auf denselben Wegen in* $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ *Werthe, die sich von dem Werthe desselben in* $z$ *nur durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.*

II. *Es sei*

(8) $$t = (a - z)(a - z_1) \cdots (a - z_{\sigma-1}) = \varphi(z, a)$$

*wo* $a$ *eine willkürliche Grösse ist, so ist* $\varphi(z, a)$ *eine rationale Function von* $z$.

Denn da $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ die Gesammtheit der Werthe darstellt, welche jedem Quotienten zweier Integrale der Gl. (1) denselben Werth verschaffen wie für $z$, so können durch irgend einen Umlauf von $z$ nur

$z_1, z_2, \ldots . z_{\sigma-1}$ eine Vertauschung unter einander erfahren. Da überdiess vorausgesetzt ist, dass Gl. (1) algebraïsch integrirbar sei, so sind $z_1, z_2, \ldots . z_{\sigma-1}$ von $z$ algebraïsch abhängig, daher ist $t$ eine algebraïsche Function von $z$, welche durch Umläufe von $z$ nicht verändert wird, d. h. eine rationale Function von $z$.

III. *Die Function* $\varphi(z, \alpha)$ *hat die Eigenschaft*

(9) $$\varphi(z_\varkappa, \alpha) = \varphi(z, \alpha).$$

Denn es möge für $z = z_\varkappa, z_1, z_2, \ldots . z_{\sigma-1}$ resp. in $z'_1, z'_2, \ldots . z'_{\sigma-1}$ übergehen. Wenn nicht $z_\varkappa, z'_1, z'_2, \ldots . z'_{\sigma-1}$ abgesehen von der Reihenfolge mit $z_1, z_2, \ldots . z_{\sigma-1}, z$ übereinstimmten, so müsste jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (1) für mehr als $\sigma$ Werthe von $z$ je einen gleichen Werth annehmen, gegen unsere Voraussetzung.

IV. *Zu einem bestimmten willkürlichen Werthe von t der Gleichung* (8) *gehören genau die Werthe* $z, z_1, z_2, \ldots . z_{\sigma-1}$ *von* $z$.

In der That wird nach Satz III die Gleichung

$$t = \varphi(z, \alpha)$$

durch $z = z, z = z_1, z = z_2, \ldots . z = z_{\sigma-1}$ befriedigt. Ist andererseits $z'$ ein von diesen verschiedener Werth von $z$, so kann nicht die Gleichung

$$\varphi(z, \alpha) = \varphi(z', \alpha)$$

bestehen, wegen der Willkürlichkeit von $\alpha$.

Durch einen beliebigen Umlauf von $t$ muss dem Satze IV gemäss $z$ in einen der Werthe $z, z_1, z_2, \ldots . z_{\sigma-1}$ übergehen. Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7) zugehörig dem Werthenpaare $(t, z)$, so erhält $\omega_\varkappa$ durch einen beliebigen Umlauf von $t$, d. h. dem Werthenpaare $(t, z_\varkappa)$ entsprechend, nach Satz I den Werth $\omega'_\varkappa$

(10) $$\omega'_\varkappa = j[a_{\varkappa 1}\omega_1 + \cdots + a_{\varkappa m}\omega_m], \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots m$$

wo $j$ eine Einheitswurzel bedeutet.

Transformiren wir daher die Gleichung (7) in eine Gleichung

(11) $$\frac{d^m\omega}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}\omega}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)\cdot\omega = 0$$

mit der unabhängigen Variabeln $t$.

Nun ist(¹) für das Werthsystem $(t, z)$

(12) $$h_i(t) = -\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

wo

$$\Delta = \sum \pm\, \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz} \frac{d^2\omega_3}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1}\omega_m}{dz^{m-1}}$$

und $\Delta_i$ aus $\Delta$ hervorgeht, wenn man die $m - i^{te}$ Horizontalreihe in $\Delta$ durch $\frac{d^m\omega_1}{dz^m}, \frac{d^m\omega_2}{dz^m}, \cdots \frac{d^m\omega_m}{dz^m}$ ersetzt.

In gleicher Weise ist für $(t, z_x)$

(13) $$h_i(t) = -\frac{\Delta'_i}{\Delta'},$$

wo $\Delta'$ und $\Delta'_i$ aus $\Delta$ resp. $\Delta_i$ erhalten werden, wenn man $\omega_x$ durch $\omega'_x$ ersetzt. Aus Gleichung (10) ergiebt sich aber:

(14) $$\frac{\Delta'_i}{\Delta'} = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

das heisst:

V. *Die Coefficienten der Differentialgleichung (11) sind rationale Functionen von $t$.*

VI. *Ist $t$ ein willkürlicher Werth, so giebt es* **nicht** *einen davon verschiedenen Werth $t_1$ von der Beschaffenheit, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11) auf geeigneten Wegen je einen gleichen Werth wie in $t$ annehmen könnte.*

Wenn nämlich jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11) in $t$ und $t_1$ je einen gleichen Werth annimmt, so kommt dieselbe Eigenschaft jedem Quotienten zweier Integrale der Gleichung (7) zu. Dieses ist jedoch nicht möglich. Denn es mögen dem willkürlichen Werthe $t$ die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ von $z$ nach Gl. (8) entsprechen. Alsdann sind die dem Werthe $t_1$ nach derselben Gleichung entsprechenden Werthe $z', z'_1, z'_2, \ldots z'_{\sigma-1}$ von $z$ sämmtlich von den Werthen $z, z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ verschieden. Wäre nämlich einer der ersteren mit $z_x$ übereinstimmend, so wäre

$$t_1 = \varphi(z_x, a) = \varphi(z, a) = t$$

(¹) Siehe meine Arbeit B. 66 des Borch. Journ. S. 143.

nach Satz III. Es müsste demnach für das Werthsystem $z, z_1, z_2, \dots z_{\sigma-1}$, $z'_1, z'_2, \dots z'_{\sigma-1}$ jeder Quotient zweier Integrale je einen gleichen Werth annehmen. Der Voraussetzung gemäss soll dieses nur für $\sigma$ Werthe stattfinden.

Es seien $U_0, U_1, \dots U_{\sigma-1}$ die Umläufe von $z$, für welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1), $y$ resp. in $y, y', y'', \dots y^{(r-1)}$ übergeht, derart dass nicht der Quotient zweier dieser Werthe constant, während jeder andere Umlauf von $z$ jeden dieser Werthe nur in einen derselben mit einem constanten Factor multiplicirten Werthe überführt.

Im Anschluss an eine Bezeichnung, welche ich in meiner Arbeit über algebraïsch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung([1]) eingeführt habe, will ich im Folgenden $y, y', y'', \dots y^{(r-1)}$ *ein reducirtes Werthsystem* des Integrals $y$ nennen. Die Elemente eines reducirten Werthsystems sind demnach nur bis auf Einheitswurzeln als Factoren bestimmt.

Ein Umlauf $s$ von $t$ führe $z$ in $z_x$ über auf einem Wege $S$, welcher das allgemeine Integral $\omega$ in $j\omega$ verwandle, wo $j$ eine Einheitswurzel, so werden die Wege $SU_0, SU_1, SU_2, \dots SU_{\sigma-1}$ $\omega$ resp. in $j\omega, j\omega', j\omega'', \dots j\omega^{(r-1)}$ verwandeln, wo $SU_x$ den aus $S$ und $U_x$ zusammengesetzten Weg von $z$ bezeichnet, und wo nach Satz I $\omega, \omega', \omega'', \dots \omega^{(r-1)}$ abgesehen von Einheitswurzeln als Factoren durch dieselben Substitutionen aus $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ hervorgehen wie $y, y', \dots y^{(r-1)}$ aus $y_1, y_2, \dots y_m$. Die Wege $SU_0, SU_1, \dots SU_{\sigma-1}$ bringen alle denselben Werth von $t$ hervor, und die Quotienten zweier der Werthe $j\omega, j\omega', \dots j\omega^{(r-1)}$ sind nicht constant. Alle anderen Wege, welche von $z$ nach $z_x$ überführen, bringen nur Werthe von $\omega$ hervor, welche von den zuletzt genannten sich um constante Factoren unterscheiden. Also alle Umläufe von $t$, welche von $z$ in $z_x$ überführen, bringen genau $r$ Werthe hervor, deren Quotienten nicht constant. Die Umläufe von $t$ aber, welche von $z$ nach $z_l$ führen, wo $l$ von $x$ verschieden, bringen nach demselben Schlusse nur Werthe $j'\omega, j'\omega', j'\omega'', \dots j'\omega^{(r-1)}$ hervor, wo $j'$ eine von $j$ verschiedene Einheitswurzel sein kann. Dasselbe gilt von den Umläufen von $t$, welche $z_x$ in sich selbst überführen. Demnach ist $\omega, \omega', \omega'', \dots \omega^{(r-1)}$ ein reducirtes Werthsystem des willkürlichen Integrals $\omega$ der Gleichung (11), und man erhält den Satz:

VII. *Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines*

([1]) Borch. Journ. B. 81, S. 111.

*willkürlichen Integrals der Gleichung (11) ist übereinstimmend mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines willkürlichen Integrals der Gleichung (1).*

## 4.

I. *Es sei W ein Umlauf der unabhängigen Variabeln z, durch welchen jeder Quotient zweier Integrale der beliebigen Differentialgleichung*

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1}$$

*mit rationalen Coefficienten unverändert bleibt, so wird durch denselben Umlauf jedes Integral in sich selbst multiplicirt mit einer und derselben Constanten übergeführt.*

Es sei in der That $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1), so ist

$$\sum \pm\, y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} = e^{-\int p_1 dz} \tag{2}$$ [1]

Der Voraussetzung gemäss gehen nach Vollzug des Umlaufes $W$ die Integrale $y_1, y_2, \ldots y_m$ resp. in $y_1 v, y_2 v, \ldots y_m v$ über. Daher ist nach Gleichung (2)

$$\sum \pm\, (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \frac{d^2(vy_3)}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^{m-1}} = j e^{-\int p dz} \tag{3}$$

wo $j$ eine Constante bedeutet. Nun aber ergiebt sich identisch

$$\sum \pm\, (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^m} = v^m \sum \pm\, y_1 \frac{dy_2}{dz} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (2), (3), (4) folgt demnach

$$v^m = j \tag{5}$$

womit unser Satz erwiesen ist.

---

[1] S. meine Abhandlung B. 66 des Borch. Journ. S. 128.

Es sei die Differentialgleichung

(6) $$\frac{d^m v}{dt^m} + q_2(t)\frac{d^{m-2}v}{dt^{m-2}} + \cdots + q_m(t)\cdot v = 0$$

mit in $t$ rationalen Coefficienten, von welchen der mit $\frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}}$ multiplicirte verschwindet, algebraïsch integrirbar. Setzt man

$$t = \frac{1}{\xi}$$

so verwandelt sich die Gleichung (6) in

(6 a) $$\frac{d^m v}{d\xi^m}\cdot\xi^{2m} + m(m-1)\frac{d^{m-1}v}{d\xi^{m-1}}\cdot\xi^{2m-1} + \cdots = 0$$

Bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \ldots . s_m$ die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ergiebt sich aus Gl. (6 a)

(7) $$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = -\frac{m(m-1)}{2}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass wenigstens eine der Grössen $s_1, s_2, \ldots . s_m$ negativ und absolut grösser als $\frac{m-1}{2}$, da nicht zwei derselben einander gleich sein können in Folge der Voraussetzung, dass Gleichung (6) algebraïsch integrirbar. (¹)

Ein willkürliches Integral $v$ der Gleichung (6) hat die Form

(8) $$v = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots . c_m$ willkürliche Constanten, $\eta_1, \eta_2, \ldots . \eta_m$ das zu $t = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen bedeuten. Daher ist $v$ für $t = \infty$ unendlich wie eine Potenz $t^r$, deren Exponent $r$ grösser als $\frac{m-1}{2}$.

Nach einem beliebigen Umlaufe von $t$ gehe $v$ über in $v'$, wo

(9) $$v' = c'_1\eta_1 + c'_2\eta_2 + \cdots + c'_m\eta_m$$
$$c'_x = c_1 a_{1x} + c_2 a_{2x} + \cdots + c_m a_{mx},$$

(¹) S. meine Abhdl. Borch. Journ. B. 66, S. 157.

wenn durch denselben Umlauf $\eta_x$ in $\eta'_x$ übergeführt wird, wo

$$\eta'_x = a_{x1}\eta_1 + a_{x2}\eta_2 + \cdots + a_{xm}\eta_m.$$

Da die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürlich angenommen wurden und die Determinante der Grössen $\alpha_{ix}$ nicht verschwindet, so kann man $c_1, c_2 \ldots c_m$ so wählen, dass auch in $v'$ das Glied, welches wie $t^r$ unendlich wird, nicht herausfällt. Daher ist auch $v'$ für $t = \infty$ unendlich wie $t^r$.

Bildet man daher das Product der $\mu$ verschiedenen Werthe von $v$, welche allen Umläufen von $t$ entsprechen, so ist dasselbe für $t = \infty$ unendlich wie $t^{\mu r}$. Es ist daher die irreductible algebraïsche Gleichung, welcher das allgemeine Integral $v$ genügt, mindestens vom Grade $r\mu$, also höheren als $\frac{\mu(m-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf $t$.

Wir wollen jetzt von der Gleichung (6) voraussetzen, dass für einen willkürlichen Werth von $t$ nicht ein zweiter Werth $t_1$ existirt, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale derselben Gleichung je einen gleichen Werth wie in $t$ annehmen könnte.

Es mögen nun einem beliebigen Werthe eines willkürlichen Integrals $v_1$ der Gl. (6) $\xi$ verschiedene Werthe von $t$, nämlich $t, t_1, t_2, \ldots t_{\xi-1}$ entsprechen. Alsdann gehören zwei Werthenpaaren $(v_1, t_x)$, $(v_1, t_l)$, wo $x \lesseqgtr l$ zwei verschiedene Werthe eines von $v_1$ verschiedenen willkürlichen Integrals $v_2$ zu, da sonst jeder Quotient zweier Integrale für zwei verschiedene Werthe von $t$ gleiche Werthe annehmen müsste, gegen unsere Voraussetzung. Demnach entsprechen einem Werthe von $v_1$ genau $\xi$ Werthe von $v_2$, und einem Werthe von $v_2$ genau $\xi$ Werthe von $v_1$, und es findet zwischen $v_1, v_2$ eine irreductible algebraïsche Gleichung

(10) $$\varphi(v_1, v_2) = 0$$

statt, vom Grade $\xi$ sowohl in Bezug auf $v_1$ als auch in Bezug auf $v_2$. Da $v_1, v_2$ nur gleichzeitig, nämlich für singuläre Punkte der Gl. (6) oder für $t = \infty$ unendlich werden, so ist der Coefficient von $v_1^\xi$ eine Constante, die Coefficienten aller übrigen Potenzen von $v_1$ ganze rationale Functionen von $v_2$, und zwar der Coefficient von $v_1^0$ vom Grade $\xi$ in $v_2$, die übrigen Coefficienten von niedrigerem Grade in $v_2$. Umgekehrt ist der Coefficient von $v_2^\xi$ eine Constante, die Coefficienten der übrigen Potenzen von $v_2$ ganze rationale Functionen von $v_1$, der Coefficient von $v_2^0$ vom

Grade $\xi$ in $v_1$, die übrigen Coefficienten vom niedrigeren Grade in $v_1$. Wir setzen zunächst voraus, dass nicht für einen Werth von $t$ jedes willkürliche Integral verschwinde. Dann enthält die Gleichung (10) ein von $v_1$, $v_2$ *freies* Glied.

Wir substituiren nun in Gl. (10)

$$v_2 = v_1 u, \tag{11}$$

wodurch diese Gleichung in

$$\psi(u, v_1) = 0 \tag{12}$$

übergeführt werde. Die Gleichung (12) ist sowohl in Bezug auf $u$ als auch in Bezug auf $v_1$ vom Grade $\xi$. Da die Gleichung (12) in Bezug auf $v_1$, $v_2$ irreductibel ist, so kommt diese Eigenschaft auch der Gleichung (12) in Bezug auf $u$ und $v_1$ zu. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von $u$ genau $\xi$ Werthe von $v_1$.

Wenn es Umläufe von $t$ giebt, welche ein willkürliches Integral $v$ der Gl. (6) in $jv$ überführen, so ist nach Satz I $j$ eine Constante, und zwar, weil $v$ eine algebraische Function von $z$, eine Einheitswurzel. Die zu allen solchen Umläufen gehörigen Werthe von $j$ genügen daher einer Gleichung

$$x^\lambda = 1 \tag{13}$$

wo $\lambda$ eine ganze Zahl.

Nach Satz I werden $v_1^\lambda$ und $u$ durch dieselben Umläufe von $t$ verändert und nicht verändert, daher ist $v_1^\lambda$ eine rationale Function von $t$ und $u$. Es mögen nun einem willkürlichen Werth von $u$ $\alpha$ verschiedene Werthe von $t$ entsprechen, so entsprechen also demselben Werthe von $u$ höchstens $\lambda\alpha$ verschiedene Werthe von $v_1$. Es ist also

$$\lambda\alpha \geqq \xi. \tag{14}$$

Nach einem Satze meiner Abhandlung über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen([1]) haben die Exponenten von $v_1$ in der irreductiblen Gleichung zwischen $v_1$ und $t$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\lambda$.

---

([1]) S. Borch. Journ. B. 81, p. 112.

Ist daher $\nu$ die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des willkürlichen Integrals $v_1$, so ist

(15) $$\mu = \lambda \cdot \nu$$

Nach den obigen Entwickelungen ist

(16) $$\xi > \frac{\mu(m-1)}{2}$$

Aus den Gleichungen (14), (15), (16) ergiebt sich demnach

(17) $$\alpha > \frac{\nu(m-1)}{2}$$

Wenn es Werthe von $t$ giebt, für welche jedes Integral der Gleichung (6) verschwindet, so gehören dieselben zu den singulären Punkten dieser Gleichung.

Es sei in diesem Falle

(18) $$\omega_1 = v_1 + \varkappa_1, \qquad \omega_2 = v_2 + \varkappa_2,$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ willkürliche Constanten bedeuten. Die Functionen $\omega_1$, $\omega_2$ werden für $t = \infty$ und für diejenigen singulären Punkte der Gleichung (6) für welche $v_1$, $v_2$ unendlich werden, gleichzeitig unendlich. Für die singulären Punkte derselben Gleichung, für welche $v_1$, $v_2$ gleichzeitig verschwinden, erhalten sie die von Null verschiedenen Werthe $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Sie werden aber auch nicht für irgend einen anderen Werth von $t$ gleichzeitig Null, da man $\varkappa_2$ so wählen kann, dass für diejenigen Werthe von $t$, für welche $v_1$ den Werth $-\varkappa_1$ erhält, $v_2$ *nicht* gleich $-\varkappa_2$ werde. Setzt man daher in Gl. (10) $\omega_1 - \varkappa_1$, $\omega_2 - \varkappa_2$ resp. für $v_1$, $v_2$, so erhält man eine in Bezug auf $\omega_1$, $\omega_2$ irreductible Gleichung

(10 a) $$\varphi_1(\omega_1, \omega_2) = 0$$

vom Grade $\xi$ sowohl in Bezug auf $\omega_1$ als auch in Bezug auf $\omega_2$. Die Coefficienten von $\omega_2^\xi$ und von $\omega_1^\xi$ sind Constanten, während die Coefficienten der übrigen Potenzen von $\omega_1$, $\omega_2$ resp. in Bezug auf $\omega_2$, $\omega_1$ von niedrigerem Grade als dem $\xi^{ten}$ sind. Die Gleichung (10 a) enthält ein von $\omega_1$, $\omega_2$ *freies* Glied.

Setzt man daher in diese Gleichung

(11 a) $$\omega_2 = p \cdot \omega_1,$$

so geht sie in die in Bezug auf $p$ und $\omega_1$ irreductible Gleichung

$$\psi_1(p, \omega_1) = 0 \tag{12 a}$$

über, welche in Bezug auf jede der Variabeln $p$ und $\omega_1$ vom Grade $\xi$ ist. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von $p$ genau $\xi$ Werthe von $\omega_1$.

Da $x_1$, $x_2$ willkürlich gewählte Grössen bedeuten, so folgt, dass alle Umläufe von $t$, welche $p$ ungeändert lassen, gleichzeitig $v_1$, $v_2$ also auch $\omega_1$, $\omega_2$ ungeändert lassen. Demnach ist $\omega_1$ eine rationale Function von $p$ und $t$. Ist daher $\beta$ die Anzahl der verschiedenen Werthe von $t$, welche einem willkürlichen Werthe von $p$ entsprechen, so ist die Anzahl der Werthe $\omega$, welche demselben Werthe von $p$ zugehören, nicht grösser als $\beta$. Demnach ist

$$\xi \leqq \beta \tag{14 a}$$

oder

$$\beta > \frac{\mu(m-1)}{2}. \tag{16 a}$$

Die Anzahl der allen möglichen Umläufen von $t$ entsprechenden Werthe von $v_1$ und $v_2$, folglich auch von $p$ ist gleich $\mu$. Daher genügt $p$ einer irreductiblen Gleichung

$$p^{\mu} + B_1 p^{\mu-1} + \cdots + B_{\mu} = 0 \tag{19}$$

Da einem willkürlichen Werthe von $p$ $\beta$ verschiedene Werthe von $t$ entsprechen, so erhält $p$ als rationale Function von $t$ und $v_1$ an mindestens $\beta$ Stellen der Riemannschen Fläche $(t, v_1)$ einen gleichen Werth. Diese Function wird also auch in mindestens $\beta$ Stellen dieser Fläche Null und unendlich. Da aber $p$ nur für das System derjenigen endlichen nicht singulären Werthe von $t$ unendlich wird, für welche $\omega_1$ verschwindet, und nur für diejenigen endlichen nicht singulären Werthe von $t$ Null wird, für welche $\omega_2$ verschwindet, diese beiden Werthsysteme aber kein gemeinschaftliches Element besitzen, so folgt, dass

$$B_{\mu} = \frac{G(t)}{H(t)} \tag{20}$$

wo $G(t)$, $H(t)$ ganze rationale Functionen, ohne gemeinschaftlichen Theiler, beide mindestens vom Grade $\beta$.

Nun sei

$$(19\,a)\qquad u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0$$

die irreductible Gleichung, welcher $u$ genügt, und setzen wir

$$(20\,a)\qquad A_\nu = \frac{G_1(t)}{H_1(t)}$$

wo $G_1(t)$, $H_1(t)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinschaftlichen Theiler. Es bedeute $\rho$ den höheren der beiden Grade derselben.

Setzt man in (19) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so wird $p = u$, und es werden je $\lambda$ Wurzeln dieser Gleichung, welche solchen Umläufen von $t$ entsprechen, durch die ein willkürliches Integral $v$ der Gleichung (6) mit einer Einheitswurzel $j$ multiplicirt wurde, einander gleich. Es ist demnach

$$(21)\qquad (u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu)^\lambda = u^\mu + B_1^{(0)} u^{\mu-1} + \cdots + B_\mu^{(0)},$$

wo $B_i^{(0)}$ den Werth von $B_i$ für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ bedeutet. Hieraus folgt

$$(22)\qquad A_\nu^\lambda = B_\mu^{(0)}$$

Die Werthsysteme für welche $p$ unendlich oder Null wird, gehen für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in Werthsysteme über, für welche $u$ resp. unendlich oder Null wird. Da $u$ nur für endliche nicht singuläre Werthe von $t$ unendlich oder Null wird, so enthalten auch die beiden letzteren Werthsysteme kein gemeinschaftliches Element. Bezeichnet man daher mit $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ die Resultate der Substitution von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in $G(t)$, $H(t)$, so haben $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, und es folgt aus Gl. (22) oder

$$\left[\frac{G_1(t)}{H_1(t)}\right]^\lambda = \frac{G^{(0)}(t)}{H^{(0)}(t)}$$

dass die Grade von $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ genau das $\lambda$-fache resp. vom Grade von $G_1(t)$, $H_1(t)$ sind. Daher ist

$$\lambda\rho \geqq \beta,$$

also nach Gleichung (16 a)

$$(23)\qquad \rho > \frac{\nu(m-1)}{2}$$

Aus (17) und (23) folgt, *dass die Anzahl der verschiedenen Werthe von $t$, welche einem willkürlichen Werthe von $u$ entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist.*

Ist

$$\frac{d^m y}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)y = 0 \tag{24}$$

eine beliebige lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche nur algebraïsche Integrale besitzt. Setzt man

$$y = e^{-\frac{1}{m}\int h_1(t)dt} \cdot v \tag{25}$$

so erhält man für $v$ eine wie (6) beschaffene Differentialgleichung.

Setzen wir voraus, dass für einen willkürlichen Werth von $t$ *nicht* ein zweiter Werth $t_1$ existirt von der Beschaffenheit dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (24) in $t_1$ denselben Werth wie in $t$ annehme, so besitzt die wie Gl. (6) beschaffene Gleichung dieselbe Eigenschaft. Es ist daher die Anzahl der verschiedenen Werthe von $t$, welche dem Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der wie (6) beschaffenen Gleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$, wenn $\nu$ die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals dieser Gleichung bedeutet. Aus Gl. (25) ergiebt sich, dass $\nu$ auch die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24) bedeutet. Da andererseits für zwei Werthe von $t$, für welche ein Quotient zweier willkürlicher Integrale der wie (6) beschaffenen Gleichung gleiche Werthe annimmt, auch der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (24) gleiche Werthe erhält, und umgekehrt, so folgt, *dass auch die Anzahl der verschiedenen Werthe von $t$, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der Gleichung (24) entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist, wo $\nu$ die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24) bedeutet.*

Unter Berücksichtigung der Sätze I, VI, VII der N° 3 erhält man daher das folgende Theorem.

II. *Ist $\nu$ die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals einer beliebigen linearen homogenen algebraïsch integrir-*

*baren Differentialgleichung $m^{ter}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe der unabhängigen Variabeln, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale derselben Differentialgleichung entsprechen, grösser als* $\frac{\nu(m-1)}{2}$.

## 5.

Wir betrachten die Gleichung (B) als eine algebraische Gleichung zwischen $\eta$, $\zeta$ und bezeichnen nach RIEMANN mit $p$ die Classe dieser algebraischen Gleichung, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien $J_1, J_2, \ldots J_p$ solche linear unabhängige Integrale erster Gattung, in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn ARONHOLD ([1]) von CLEBSCH und Herrn GORDAN ([2]) eingeführt worden ist, so dass also

$$(1) \qquad dJ_x = \frac{\varphi_x(y_1, y_2, y_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} \cdot \sum \pm c_1 y_2 dy_3 \qquad x = 1, \ldots p,$$

wo $\varphi_x = 0$ eine Curve $n - 3^{ter}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämmtlichen Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Curve (B) hindurchgeht.

Nach N° 2 ist

$$(2) \qquad \sum \pm c_1 y_2 dy_3 = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \varDelta \, dz$$

und nach Gleichung (C)

$$(3) \qquad c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) M$$

folglich ist

$$(4) \qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} = \frac{\varDelta}{M} dz$$

Nach N° 1 Gl. (24) ist

$$(5) \qquad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\varDelta}{y_1^{\,2}}.$$

([1]) Monatsberichte der K. Akademie der Wissensch. zu Berlin, April 1861.

([2]) Theorie der Abelschen Functionen, S. 2.

Andererseits ist nach Gl. (C)

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\zeta}{dz} : \frac{d\eta}{dz} = -\frac{u_2}{u_3} = -\frac{f_2}{f_3}, \tag{6}$$

wenn man zur Abkürzung $f_x$ für $\frac{\partial f}{\partial y_x}$ setzt. Bezeichnet man ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_x}$ mit $f_{ix}$, und mit $F_{ix}$ den Coefficienten von $f_{ix}$ in der Hessischen Covariante von $f$, so folgt

$$d\,\frac{d\zeta}{d\eta} = [F_{11}(y_2 dy_3 - y_3 dy_2) + F_{12}(y_3 dy_1 - y_1 dy_3) + F_{13}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1)] \cdot \frac{1}{(n-1) f_3^2},$$

also

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3) y_1^2}{u_3 (n-1) f_3^2},$$

demnach nach Gl. (C)

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}f_1 + F_{12}f_2 + F_{13}f_3)\, y_1^2}{f_3^3 (n-1)}$$

also endlich

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{H(f) y_1^3}{f_3^3} \tag{7}$$

Substituirt man diesen Werth in (5) und setzt ausserdem für $\frac{d\eta}{dz}$ seinen Werth

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\varDelta}{y_1^2} u_3 = \frac{\varDelta}{y_1^2} \cdot \frac{f_3}{M},$$

so folgt

$$\frac{1}{M^3} = \frac{(n-1)^2}{\varDelta^2 X(z)}, \tag{8}$$

also ist nach Gl. (4)

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{\varDelta}{X}} \tag{9}$$

In den Gll. (4) und (9) sind $\varDelta$, $M$, $X$ Wurzeln rationaler Functionen von $z$, und zwar hat $X$ dieselbe Bedeutung wie in Gl. (2) N° 1, $M$ dieselbe Bedeutung wie in Gl. (C), während

$$\varDelta = e^{-\int p\,dz} \tag{10}$$

Durch einen beliebigen Umlauf von $z$ möge $y_\varkappa$ in $y'_\varkappa$ übergehen, wo

$$(11) \qquad y'_\varkappa = a_{\varkappa 1}y_1 + a_{\varkappa 2}y_2 + a_{\varkappa 3}y_3, \qquad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so genügen $y'_1, y'_2, y'_3$ der irreductiblen Gleichung

$$(12) \qquad f(y'_1, y'_2, y'_3) = 0.$$

Es sind demnach $\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) = 0$ Curven $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung in $y'_1, y'_2, y'_3$, welche durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von (12) hindurchgehen. Daher sind

$$J'_\varkappa = \int \frac{\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)\sum c_1 y'_2 dy'_3}{c_1\dfrac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2\dfrac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3\dfrac{\partial f}{\partial y'_3}} \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots p$$

die $p$ linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu der Gleichung (12) gehören. Diese Integrale als Functionen von $z$ sind demnach für keinen Werth von $z$ unendlich. Setzt man für $y'_1, y'_2, y'_3$ ihre Werthe aus Gl. (11) in $\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)$, so wird

$$\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) = \psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3),$$

wo $\psi_\varkappa$ eine ganze rationale und homogene Function $n-3^{\text{ten}}$ Grades ist. Ferner hat man nach Gl. (4) oder Gl. (9)

$$\frac{\sum \pm c_1 y'_2 dy'_3}{c_1\dfrac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2\dfrac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3\dfrac{\partial f}{\partial y'_3}} = j\,\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\dfrac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\dfrac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\dfrac{\partial f}{\partial y_3}}$$

wo $j$ eine Einheitswurzel bedeutet, folglich ist

$$J'_\varkappa = j\int \frac{\psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3)}{c_1\dfrac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\dfrac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\dfrac{\partial f}{\partial y_3}} \cdot \sum \pm c_1 y_2 dy_3.$$

Da $J'_\varkappa$ für keinen Werth von $z$, folglich auch für kein Werthsystem $y_1, y_2, y_3$ unendlich wird, so ist $J'_\varkappa$ ein Integral erster Gattung gehörig zur Gleichung (B). Hieraus ergiebt sich, dass $\psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3) = \varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)$ durch eine lineare homogene Function von $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \ldots \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ dargestellt wird, oder

I. *Die Functionen* $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \ldots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ *genügen einer linearen homogenen Gleichung* $p^{ter}$ *Ordnung*

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^p\omega}{dz^p} + Q_1 \frac{d^{p-1}\omega}{dz^{p-1}} + \cdots + Q_p\omega = 0$$

*mit in* $z$ *rationalen Coefficienten.*

Es sei $U$ ein Umlauf der Variabeln $z$, durch welchen ein Quotient $\lambda$ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) ungeändert bleibt, *ohne* dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, wo $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ die Functionen bedeuten, in welche resp. $y_1$, $y_2$, $y_3$ durch denselben Umlauf übergehen, nämlich

$$\text{(13)} \qquad y'_\varkappa = a_{\varkappa 1}y_1 + a_{\varkappa 2}y_2 + a_{\varkappa 3}y_3, \qquad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Ist alsdann $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, $y_3 = b_3$ ein Werthsystem, für welches $\lambda$ Null oder Unendlich wird, und setzt man

$$\text{(14)} \qquad b'_\varkappa = a_{\varkappa 1}b_1 + a_{\varkappa 2}b_2 + a_{\varkappa 3}b_3, \qquad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so wird $\lambda$ auch für $y_1 = b'_1$, $y_2 = b'_2$, $y_3 = b'_3$ Null resp. unendlich. Fixirt man daher $p - 1$ willkürliche Werthsysteme $b_{i1}$, $b_{i2}$, $b_{i3}$ von $y_1$, $y_2$, $y_3 (i = 1, 2, \ldots p - 1)$, für welche $\lambda$ unendlich wird, so wird $\lambda$ auch für die $p - 1$ Werthsysteme

$$\text{(15)} \qquad b'_{i\varkappa} = a_{\varkappa 1}b_{i1} + a_{\varkappa 2}b_{i2} + a_{\varkappa 3}b_{i3}, \qquad \varkappa = 1, 2, 3 \qquad i = 1, 2 \cdots p - 1$$

von $y_1$, $y_2$, $y_3$ unendlich.

Nach der Voraussetzung ist *nicht* gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$. Andererseits ist auch *nicht* gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$ $l \gtrless i$ oder $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$, $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$, da man die Werthe von $z$, welche zu einem Systeme $b_{i1}$, $b_{i2}$, $b_{i3}$ und zu einem Systeme $b_{l1}$, $b_{l2}$, $b_{l3}$ gehören, vollständig von einander unabhängig gewählt hat. Demnach constituiren die Werthsysteme $b_{i1}$, $b_{i2}$, $b_{i3}$ und die Werthsysteme $b'_{i1}$, $b'_{i2}$, $b'_{i3}$ $2p - 2$ verschiedene Werthsysteme, für welche $\lambda$ unendlich wird.

Bezeichnet man die durch zweimalige Wiederholung der Substitution (13) aus $b_{i1}$, $b_{i2}$, $b_{i3}$ hervorgehenden Werthe mit $b''_{i1}$, $b''_{i2}$, $b''_{i3}$, so ist

erstlich *nicht* gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b''_{l2}}{b''_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b''_{l3}}{b''_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$, $i \gtrless l$, aus denselben Gründen wie oben. Andererseits ist auch, weil wir die zu $b_{i1}$, $b_{i2}$, $b_{i3}$ gehörigen Werthe von $z$ willkürlich gewählt haben, *nicht* gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, *ohne* dass auch gleichzeitig

$$\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}} \quad \text{und} \quad \frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}} \tag{16}$$

Da nun $\lambda$ durch den Umlauf von $U$ ungeändert bleibt, so muss diese Function auch für die Werthsysteme $b''_{i1}$, $b''_{i2}$, $b''_{i3}$ unendlich werden. Nun aber kann $\lambda$ ausser für die $2p-2$ verschiedenen Werthsysteme $(b_{i1}, b_{i2}, b_{i3})$, $(b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3})$ nicht mehr unendlich werden, da bekanntlich der Quotient der Differentiale zweier Integrale erster Gattung der Classe $p$ für nicht mehr als $2p-2$ Stellen der RIEMANN'schen Fläche unendlich wird;([1]) es müssen demnach die Gll. (16) stattfinden. Dieselben liefern wegen der willkürlichen Wahl der zu $b_{i1}$, $b_{i2}$, $b_{i3}$ gehörigen Werthe von $z$ den Satz

II. *Giebt es einen Umlauf $U$ von $z$, welcher $y_1$, $y_2$, $y_3$ überführt resp. in $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, und zugleich den Quotienten $\lambda$ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) unverändert lässt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.*

Wenn ausser dem Umlaufe $U$ noch ein anderer $\overline{U}$ die Eigenschaft hat, dass durch dessen Anwendung $\lambda$ ungeändert bleibt, *ohne* dass zugleich der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A) ungeändert bleibt, so ergiebt sich wiederum aus dem Umstande, dass $\lambda$ nur für $2p-2$ Werthsysteme von $y_1$, $y_2$, $y_3$ unendlich werden kann, wenn man mit $\overline{b_{i\varkappa}}$ den durch Anwendung der $\overline{U}$ entsprechenden Substitution aus $b_{i\varkappa}$ hergeleiteten Werth bezeichnet, dass

$$\frac{\overline{b_{i2}}}{\overline{b_{i1}}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}, \qquad \frac{\overline{b_{i3}}}{\overline{b_{i1}}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}, \tag{17}$$

([1]) RIEMANN, Abelsche Functionen, in Borchardts Journ. B. 54.

d. h. wegen der willkürlichen Wahl der zu $b_{i\varkappa}$ gehörigen Werthe von $z$, der Umlauf $\overline{U}$ führt den Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A) in denselben Werth über wie $U$, oder was nach dem Satze I N° 4 dasselbe ist, der Umlauf $\overline{U}$ führt $y_1$, $y_2$, $y_3$ resp. in $jy'_1$, $jy'_2$, $jy'_3$ über, wenn $U$ dieselben Functionen resp. in $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ überführt, und wo $j$ eine Einheitswurzel bedeutet.

Es seien $S_0$, $S_1$, $S_2$, .... $S_{\sigma-1}$ diejenigen Umläufe von $z$, welche ein reducirtes Werthsystem eines willkürlichen Integrals $\omega$ der Gl. (D), nämlich $\omega$, $\omega'$, $\omega''$, .... $\omega^{(\sigma-1)}$ hervorbringen. Jeder andere Umlauf bringt also nur einen dieser Werthe mit einer Einheitswurzel multiplicirt hervor. Den Umläufen $S_0$, $S_1$, .... $S_{\sigma-1}$ entsprechen die Werthe $y, y', y''$, .... $y^{(\sigma-1)}$ eines willkürlichen Integrals $y$ der Gleichung (A). Es können nicht zwei der letztgenannten Werthe ein constantes Verhältniss besitzen, da sonst auch zwei entsprechende Werthe der Reihe $\omega$, $\omega'$, $\omega''$, .... $\omega^{(\sigma-1)}$ ein constantes Verhältniss hätten. — Die Umläufe $S_0 U$, $S_1 U$,.... $S_{\sigma-1} U$ erzeugen die Werthe $y^{(\sigma)}$, $y^{(\sigma+1)}$, .... $y^{(2\sigma-1)}$, während dieselben $\omega$, $\omega'$, .... $\omega^{(\sigma-1)}$ nur mit constanten Factoren multipliciren. Die Werthe $y^{(\sigma)}$, $y^{(\sigma+1)}$, .... $y^{(2\sigma-1)}$ unterscheiden sich der Voraussetzung nach von $y$, $y'$, $y''$, .... $y^{(\sigma-1)}$ nicht bloss um constante Factoren. Jeder andere Umlauf von $z$ bringt aber nach dem obigen nur Werthe hervor, welche gleich sind einem der Werthe der Reihe $y$, $y'$, $y''$, .... $y^{(2\sigma-1)}$ multiplicirt mit einer Constanten. Diese letztere Reihe ist also ein reducirtes Werthsystem von $y$.

Giebt es aber keinen Umlauf der Art $U$, so ist $y$, $y'$, $y''$, .... $y^{(\sigma-1)}$ ein reducirtes Werthsystem von $y$. Man erhält also den Satz

III. *Ist $\nu$ die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A), so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder $\nu$ die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (D), je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.*

Es seien $(\eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2, .... 2p-2$ die $2p-2$ Stellen der RIEMANN'schen Fläche $(\eta, \zeta)$, in welchen $\lambda$ einen willkürlich vorgeschriebenen Werth annimmt. Von diesen Stellen können $p-1$ willkürlich gegeben sein. Wir bezeichnen die letzteren mit $(\eta_1, \zeta_1)$, .... $(\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$; dieselben können so gewählt werden, dass sie zu $p-1$ verschiedenen Werthen von $z$ gehören. Wenn zu einer der übrigen Stellen $(\eta_p, \zeta_p)$, .... $(\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ ein Werth von $z$ gehört, welcher auch einer der ersteren $p-1$ Stellen entspricht, wenn z. B. $(\eta_{p+\varkappa}, \zeta_{p+\varkappa})$ zu demselben $z$ gehört, wie $(\eta_l, \zeta_l)$, so

gäbe es einen Umlauf von $z$, welcher $\eta_l$, $\zeta_l$ resp. in $\eta_{p+x}$, $\zeta_{p+x}$ überführte. Da durch denselben Umlauf $\lambda$ in sich selbst übergeführt wird, und bei willkürlicher Wahl von $(\eta_1, \zeta_1) \dots . (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ die Gleichungen $\eta_{p+x} = \eta_l$, $\zeta_{p+x} = \zeta_l$ *nicht gleichzeitig* erfüllt sind, so wäre dieser Umlauf der Art $U$.

Giebt es also keinen Umlauf der Art $U$, so gehören zu einem willkürlichen Werthe von $\lambda$ genau $\varepsilon(2p - 2)$ verschiedene Werthe von $z$, wenn man mit $\varepsilon$ die Anzahl der verschiedenen Werthe von $z$ bezeichnet für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.

Wenn es aber einen Umlauf der Art $U$ giebt, so mögen mit $\eta'$, $\zeta'$ die Werthe bezeichnet werden, in welche derselbe $\eta$, $\zeta$ überführt. Es nimmt alsdann $\lambda$ für $(\eta'_1, \zeta'_1), \dots (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ denselben Werth an wie für $(\eta_1, \zeta_1), \dots$ $\dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$. Da diese letzteren Stellen untereinander verschieden sind, so sind es auch die ersteren. Der Voraussetzung gemäss ist auch keiner der ersteren mit einem der letzteren übereinstimmend. Es fallen demnach $(\eta_p, \zeta_p), \dots$ $\dots (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ mit $(\eta'_1, \zeta'_1) \dots (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ zusammen. Da die Werthe von $z$, welche zu den verschiedenen Stellen $(\eta_1, \zeta_1) \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ gehören, von einander verschieden sind, so ergiebt sich, dass in dem Falle der Existenz eines Umlaufes der Art $U$ zu einem willkürlichen Werthe von $\lambda$ genau $\varepsilon(p - 1)$ verschiedene Werthe von $z$ gehören. Man erhält also den Satz:

IV. *Je nachdem es Umläufe der Art $U$ giebt oder nicht giebt, ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von $z$, welche zu einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) gehören, $\varepsilon(p - 1)$ oder $2\varepsilon(p - 1)$, wenn $\varepsilon$ die Anzahl der verschiedenen Werthe von $z$ bedeutet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.*

Besitzt die Gl. (A) die Eigenschaft, dass *nicht* zu einem willkürlichen Werthe $z$ ein Werth $z_1$ gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) in $z$ und $z_1$ je einen gleichen Werth annimmt, so ist $\varepsilon = 1$. Es folgt alsdann nach Satz II N° 4, Satz III u. Satz IV dieser N°

$$\text{(E)} \qquad p - 1 \geqq \frac{p-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \nu$$

oder

$$2(p - 1) \geqq \frac{p-1}{2} \cdot \nu$$

je nachdem es Umläufe der Art $U$ giebt oder nicht giebt.

In beiden Fällen folgt für $p > 1$

(F) $$\nu \leqq 4.$$

Wenn zu einem willkürlichen Werthe $z$ ein Werth $z_1$ gehört von der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) in $z$ und $z_1$ je einen gleichen Werth annimmt, so kann man, da $n > 2$, also die Gleichung (A) algebraïsch integrirbar vorausgesetzt ist, nach N° 3 durch Multiplication der abhängigen Variabeln $y$ mit einer Wurzel einer rationalen Function von $z$ und Transformation der unabhängigen Variabeln $z$ in eine Veränderliche $t$ die Gleichung (A) in eine Gleichung überführen der Form

(A'') $$\frac{d^3\omega}{dt^3} + h_1(t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + h_2(t)\frac{d\omega}{dt} + h_3(t)\omega = 0$$ (s. dort Gl. (11))

mit rationalen Coefficienten, welche die Eigenschaft besitzt, dass *nicht* zu einem willkürlichen Werthe von $t$ ein Werth $t_1$ gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A'') in $t$ und $t_1$ je einen gleichen Werth annimmt. (Satz VI N° 3).

Die Natur der Transformationen welche von (A) zu (A'') führen bringt es mit sich, dass die Gleichung (B) auch für ein Fundamentalsystem $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ von Integralen der Gl. (A'') bestehen bleibt, dass also

(18) $$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$$

Bildet man die zu (18) gehörigen Integrale erster Gattung, so ist demnach die Anzahl der linear unabhängigen ebenfalls $p$. Da ferner nach Satz VII N° 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A'') mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) übereinstimmt, so ergiebt sich, *dass die Gleichungen* (*E*) *und* (*F*) *auch bestehen bleiben, wenn für einen willkürlichen Werth von $z$ und noch andere Werthe $z_1$ jeder Quotient zweier Integrale der Gl.* (*A*) *je einen gleichen Werth annimmt.*

Das durch (F) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

V. *Ist die Classe $p$ der Gleichung* (*B*) *grösser als Eins, so ist die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung* (*A*) *nicht grösser als vier, oder, was dasselbe ist, die Anzahl*

*der reducirten Wurzeln* ([1]) *der algebraïschen Gleichung, welcher dieses allgemeine Integral genügt, ist nicht grösser als vier.*

## 6.

Für

$$p = 1$$

gehört zur Gl. (B) nur *ein* Integral erster Gattung $J$. Es sei wie in N° 5

(1) $$dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3)\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

Führt man auf der rechten Seite die Variabeln $\eta$, $\zeta$ ein, so erhält man

(2) $$dJ = \varphi_1(\eta, \zeta) d\eta$$

wo $\varphi_1$ eine rationale Function von $\eta$, $\zeta$. Andererseits sind $\zeta$ und $\frac{d\eta}{dz}$ rationale Functionen von $\eta$, $z$. Folglich erhält man für die unabhängige Variable $z$

(3) $$dJ = \psi(z, \eta) dz$$

wo $\psi$ eine rationale Function von $z$, $\eta$.

Nach N° 5 wird entsprechend einem Umlauf von $z$, welcher $y_1$, $y_2$, $y_3$ resp. in $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ überführt,

(4) $$\varphi(y'_1, y'_2, y'_3) = j\varphi(y_1, y_2, y_3),$$

wo $j$ eine Constante und zwar, weil für $n > 2$ $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine algebraïsche Function von $z$ ist, eine Einheitswurzel bedeutet. Demnach ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine Wurzel einer rationalen Function von $z$. Aus dieser Bemerkung und aus Gleichung (4) oder Gl. (9) N° 5 ergiebt sich demnach, dass auch

(5) $$dJ = R dz,$$

wo $R$ Wurzel einer rationalen Function von $z$ bedeutet.

---

([1]) Ueber die Bedeutung dieser Bezeichnung s. meine Arbeit in Borchardt's Journal B. 81, S. 111, N° 9.

Setzen wir voraus, dass die Gleichung (A) so beschaffen sei, dass *nicht* für einen willkürlichen Werth von $z$ und noch für andere Werthe von $z$ jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt, so ist demnach $z$ eine rationale Function von $\eta$, $\zeta$. Da wir vorausgesetzt haben, dass $J$ das zu $(\eta, \zeta)$ gehörige Integral erster Gattung sei, so sind $\eta$, $\zeta$ eindeutige Functionen von $J$, folglich ist auch $z$ eine eindeutige Function von $J$.

Demnach ergiebt sich aus dem Bestehen der Gleichung (5) nach den Untersuchungen der Herren Briot und Bouquet,(¹) *dass $R^4$ oder $R^6$ eine rationale Function von $z$ sein müsse.*

Unter derselben Voraussetzung über die Gl. (A) ergiebt sich auch, dass $\eta$, $z$ eindeutige Functionen von $J$. Demnach ist auch die Classe der algebraischen Function $\eta$ von $z$ gleich Eins, und $\psi(z, \eta)$ nach Gleichung (3) die Ableitung des zu $(z, \eta)$ gehörigen Integrals erster Gattung.

Der Ausdruck

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

bleibt ungeändert, wenn man an die Stelle von $y_x$ setzt $b_{x1}y_1 + b_{x2}y_2 + b_{x3}y_3$, wo $b_{xl}$ beliebige Constanten bedeuten, d. h. der genannte Ausdruck ist von der Wahl des Fundamentalsystems $y_1$, $y_2$, $y_3$ unabhängig. Gleichermassen ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ bis auf einen constanten Factor von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig, folglich ist auch bis auf einen constanten Factor $R$ von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig.

Aus (3) und (5) folgt

$$R = \psi(z, \eta) \tag{6}$$

d. h. es ist $R$ eine rationale Function von $\eta$, $z$. Wir behaupten aber, dass auch umgekehrt $\eta$ eine rationale Function von $z$, $R$ ist. Denn gäbe es einen Umlauf von $z$, welcher $R$ ungeändert liesse, dagegen $\eta$ in $\eta'$ verwandelte, so würde in den beiden Blättern $\eta$, $\eta'$ der Riemann'schen Fläche der algebraischen Function $\eta$ von $z$ die Function $R$ für dasselbe $z$ denselben Werth annehmen. Wir können aber das Fundamentalsystem

(¹) Journal de l'Ecole polytechnique t. 21, p. 222.

$y_1, y_2, y_3$ so wählen, dass für $z = z_1$, wo $z_1$ ein willkürlicher Werth, in den beiden genannten Blättern $\eta$ denselben Werth $\eta_1$ erhält. Dann ist

$$(7) \qquad \int_{(z_1,\, \eta_1)}^{(z,\, \eta)} \psi(z,\ \eta)dz \equiv \int_{(z_1,\, \eta_1)}^{(z,\, \eta')} \psi(z,\ \eta)dz$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln, für Integrationswege, welche in den beiden Blättern $\eta$, $\eta'$ übereinander laufen. Es ist demnach in der genannten RIEMANN'schen Fläche

$$(8) \qquad \int_{(z,\, \eta)}^{(z,\, \eta')} \psi(z,\ \eta)dz \equiv 0$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln. Aus Gl. (8) folgt nach einem bekannten Satze, dass es eine rationale Function von $z$, $\eta$ giebt, welche für einen beliebig gegebenen Werth und nur für diesen unendlich wird, dass demnach die Classe der algebraischen Function $\eta$ von $z$ gleich Null sei. Da aber nach dem oben Bewiesenen diese Classe gleich Eins, so folgt dass es keinen Umlauf von $z$ giebt, welcher $R$ ungeändert lässt, ohne gleichzeitig $\eta$ ungeändert zu lassen, dass also $\eta$ eine rationale Function von $z$, $R$ ist.

Da eine gewisse Potenz jedes Integrals der Gleichung (A) eine rationale Function von $\eta$, $z$ ist, so ergiebt sich auch, dass eine gewisse Potenz jedes solchen Integrals durch eine rationale Function von $z$, $R$ dargestellt werden kann.

Es ist daher, wenn $\lambda$ eine gewisse ganze Zahl bedeutet,

$$(9) \qquad y^\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 R^3, \text{ oder } y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 R + \cdots + \beta_5 R^5,$$

je nachdem $R^4$ oder $R^6$ rationale Function von $z$ wird, wenn man mit $\alpha_x$ und $\beta_x$ rationale Functionen von $z$ bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) wird daher durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Da nach S. VII N° 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) stets gleich ist derselben Anzahl für eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass *nicht* für einen willkürlichen Werth der unabhän-

gigen Variabeln und noch andere Werthe derselben jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, und für welche gleichzeitig dieselbe Gleichung (B) erfüllt ist, so folgt allgemein der Satz:

I. *Ist $p = 1$, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.*

Es sei endlich

$$p = 0.$$

Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function $s$ von $\eta$, $\zeta$

$$s = \varphi(\eta, \zeta) \tag{10}$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)} \qquad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)}, \tag{11}$$

wo $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ ganze rationale Functionen $n^{ten}$ Grades der Variabeln $s$, ohne einen allen gemeinschaftlichen Theiler.

Ein beliebiger Umlauf der Variabeln $z$ führe $\eta$, $\zeta$ resp. in $\eta'$, $\zeta'$ über, so ist

$$\eta' = \frac{a_{21} + a_{22}\eta + a_{23}\zeta}{a_{11} + a_{12}\eta + a_{13}\zeta}, \qquad \zeta' = \frac{a_{31} + a_{32}\eta + a_{33}\zeta}{a_{11} + a_{12}\eta + a_{13}\zeta} \tag{12}$$

Setzt man in die aus (11) sich ergebende Gleichung

$$s' = \varphi(\eta', \zeta'),$$

wo also $s'$ den Werth bezeichnet in welchen $s$ durch den genannten Umlauf übergeht, die Werthe aus (12) ein, so ergiebt sich nach Gl. (11), *dass $s'$ eine rationale Function von $s$.* Da aber auch umgekehrt $s$ eine rationale Function von $s'$ sein muss, so folgt:

*Zwischen $s$ und $s'$ findet eine Gleichung der Form*

$$ass' + bs + cs' + d = 0 \tag{13}$$

*statt, wo $a$, $b$, $c$, $d$ Constanten sind.*

Wir setzen

$$\xi_1^2 = \frac{dz}{ds}, \qquad \xi_2 = \xi_1 \cdot s \tag{14}$$

Aus Gl. (13) folgt:

(15)
$$\frac{ds'}{dz} = \frac{bc - ad}{(as + c)^2} \frac{ds}{dz}.$$

Da $s$ nicht constant, so ist $bc - ad$ von Null verschieden.

Nach dem genannten Umlaufe von $z$ mögen $\xi_1$, $\xi_2$ resp. in $\xi'_1$, $\xi'_2$ übergehen, so ergiebt sich aus (14) und (15)

$$\xi_1'^2 = \frac{dz}{ds'} = \frac{1}{bc - ad}(as + c)^2 \cdot \xi_1^2$$

$$\xi_2'^2 = \frac{1}{bc - ad} \cdot \xi_1^2(bs + d)^2$$

also

(16)
$$\xi'_1 = \frac{1}{\sqrt{bc - ad}}(a\xi_2 + c\xi_1)$$
$$\xi'_2 = \frac{1}{\sqrt{bc - ad}}(b\xi_2 + d\xi_1).$$

Da aber $s$, folglich auch $\xi_1$, $\xi_2$ algebraïsche Functionen von $z$ sind, so lässt sich dieses Resultat auch folgendermassen aussprechen:

*Es ist $s$ der Quotient zweier Integrale $\xi_1$, $\xi_2$ einer linearen homogenen algebraïsch integrirbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung, mit der unabhängigen Variabeln $z$ und mit in $z$ rationalen Coefficienten.*

Es sei

(17)
$$f_x(s) \cdot \xi_1^n = \psi_x(\xi_1, \xi_2), \qquad x = 1, 2, 3$$

wo $\psi_x$ ganze rationale und homogene Functionen von $\xi_1$, $\xi_2$ $n^{ten}$ Grades bedeuten.

Aus den Gleichungen (11) folgt alsdann

(18)
$$y_x = \rho \cdot \psi_x(\xi_1, \xi_2), \qquad x = 1, 2, 3$$

Wenn nach einem Umlaufe von $z$, $\rho$, $\xi_1$, $\xi_2$, $y_x$ resp. in $\rho'$, $\xi'_1$, $\xi'_2$, $y'_x$ übergehen, so dass

$$y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \qquad x = 1, 2, 3$$

und nach Gl. (16)

$$\psi_x(\xi'_1, \xi'_2) = \chi_x(\xi_1, \xi_2),$$

wo $\chi_x$ ebenfalls eine ganze rationale und homogene Function $n^{ten}$ Grades von $\xi_1$, $\xi_2$ bezeichnet, so ergiebt sich aus (18)

$$(19) \qquad \rho' \chi_x(\xi_1, \xi_2) = \rho[a_{x1}\varphi_1 + a_{x2}\varphi_2 + a_{x3}\varphi_3]$$

Demnach ist $\frac{\rho'}{\rho}$ eine rationale Function von $s$.

Wenn die Function $\frac{\rho'}{\rho}$ für einen Werth von $s$ verschwindet, so muss für denselben Werth

$$a_{x1}f_1 + a_{x2}f_2 + a_{x3}f_3 = 0 \qquad \text{für } x = 1, 2, 3$$

sein, d. h. da die Determinante der Grössen $a_{xl}$ nicht verschwindet

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

sein, was nicht möglich ist, da $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Demnach ist $\frac{\rho'}{\rho}$ eine Constante. Da aber $\rho$ eine algebraische Function von $z$ ist, so folgt, *dass $\rho$ Wurzel einer rationalen Function von $z$*. Also

II. *Im Falle $p = 0$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (A) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function $n^{ten}$ Grades des Fundamentalsystems von Integralen $\xi_1$, $\xi_2$ einer algebraïsch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in $z$ rationalen Coefficienten, darstellbar* (1).

Betrachten wir nunmehr die Gl. (B) für den Fall $n = 2$.

Es sei

$$(20) \qquad a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 = 0$$

diese Gleichung, so ergiebt sich, wenn man mit $\eta_0$, $\zeta_0$ ein beliebiges Werthsystem von $\eta$, $\zeta$ bezeichnet welches derselben genügt, und wenn man setzt

$$(21) \qquad s = \frac{\zeta - \zeta_0}{\eta - \eta_0},$$

$$(22) \qquad \eta = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}, \qquad \zeta = \frac{b'_0 + b'_1 s + b'_2 s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}.$$

---

(1) Ueber solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vergl. meine Abhandl. in Borch. Journ. B. 81, S. 97 und B. 85, S. 1.

Aus den Gll. (21), (22) ergiebt sich analog wie aus den Gll. (10), (11), dass zwischen zwei Zweigen $s$ und $s'$ der Function $s$ von $z$ eine bilineare Gleichung von der Form (13) stattfindet.

Aus dieser Gleichung folgert man wie oben, dass $s$ der Quotient zweier Integrale $\xi_1$, $\xi_2$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in $z$ rationalen Coefficienten ist, jedoch mit dem Unterschiede, dass *hier die Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht algebraïsch integrirbar zu sein braucht,* da $s$ nicht algebraïsch sein muss. Auch für diesen Fall gelten die Gll. (18), und in diesen sind die Functionen $\psi_x$ ganze rationale Functionen zweiten Grades, während $\rho$ constant wird. Dieses Resultat ist mit dem in N° 2 Gegebenen übereinstimmend.

## 7.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B) besteht, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Resultate:

I. Ist der Grad $n$ der Gleichung (B) gleich zwei, so ist die Gleichung (A) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist $n$ grösser als zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A) algebraïsche Functionen von $z$.

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Classe $p$ der algebraïschen Gleichung (B) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraïschen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A) genügt, nicht grösser als *vier.*

b) Ist $p$ gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln zwei, drei, vier oder sechs.

c) Ist $p$ gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze und homogene Functionen $n^{ten}$ Grades des Fundamentalsystems von Integralen $\xi_1$, $\xi_2$ einer algebraïsch integrirbaren

linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraisch integrirbare Gleichung (A) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems $y_1$, $y_2$, $y_3$ eine Gleichung (B) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt.

Heidelberg 1882.

# SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

M. Heine a fait voir que

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int e^z z^{a-1} dz$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les $x$ négatifs, sans qu'il soit nécessaire que cette courbe soit fermée.

Dans une précédente lettre je vous ai exposé le résultat obtenu en intégrant le long de deux droites passant par l'origine. Ces résultats supposent que la partie réelle de $a > 0$.

Je vais prendre à présent pour contour d'intégration une parabole ayant pour foyer l'origine. L'équation de la parabole est

$$z = \frac{\cos \omega + i \sin \omega}{1 + \cos \omega}$$

d'où

$$dz = \frac{-\sin \omega + i(1 + \cos \omega)}{(1 + \cos \omega)^2} d\omega$$

Donc

$$\int e^z z^{a-1}\,dz = \int_0^{\pi} e^{\frac{\cos\omega}{1+\cos\omega}} \frac{1}{(1+\cos\omega)^{a+1}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{array}{l}[\cos(a-1)\omega + i\sin(a-1)\omega][-\sin\omega + i(1+\cos\omega)]e^{i\,\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}} \\ +[\cos(a-1)\omega - i\sin(a-1)\omega][\sin\omega + i(1+\cos\omega)]e^{-i\,\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}}\end{array}\right\}d\omega$$

$$= 2ie^{\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\left(2\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^{a+1}}\left\{\begin{array}{l}-[\sin a\omega + \sin(a-1)\omega]\sin\left(\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right) \\ +[\cos a\omega + \cos(a-1)\omega]\cos\left(\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right)\end{array}\right\}d\omega$$

$$= \frac{ie^{\frac{1}{2}}}{2^{a-2}}\int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}}\left(1+\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}\right)^{a-\frac{1}{2}}\cos\left[(2a-1)\frac{\omega}{2} + \mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right]d\left(\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \frac{ie^{\frac{1}{2}}}{2^{a-2}}\cdot\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}(1+x^2)^{a-\frac{1}{2}}\cos[(2a-1)\,\mathrm{arc\ tang}\,x + x]dx,$$

par conséquent,

$$\Gamma(a) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{a-1}\sin a\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}(1+x^2)^{a-\frac{1}{2}}\cos[(2a-1)\,\mathrm{arc\ tang}\,x + x]dx.$$

Si nous faisons $a = \frac{1}{2}$ et nous rappelant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, il viendra

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\cdot$$

D'un autre côté on a

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$$

On déduit de ces deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

ou bien

$$\int_0^\infty e^{-2x^2}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-2x^2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right].$$

De l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$$

on peut déduire une série d'intégrales. L'intégration par parties donne

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}x\sin x\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}x\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}x^2\cos x\,dx$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}x^2\cos x\,dx = 0$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}x\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx.$$

Si, d'une manière générale, on pose

$$A_{2n} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n} \cos x \, dx$$

$$A_{2n+1} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n+1} \sin x \, dx$$

il viendra

$$A_{2n} = A_{2n+1} - 2n A_{2n-1}$$
$$A_{2n+1} = - A_{2n+2} + (2n+1) A_{2n}$$

Ces formules permettront de déduire ces intégrales les unes des autres.

Prenons, à présent, pour contour d'intégration une parabole ayant son sommet à l'origine, avec un petit cercle entourant cette origine, pour éviter ce point critique, nous rappelant que l'intégrale sur ce cercle est nulle lorsque la partie réelle de $a$ est positive.

L'équation de la parabole est

$$z = \frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}(\cos\omega + i\sin\omega) = -\cot^2\omega - i\cot\omega;$$

d'où

$$dz = \frac{2\cos\omega + i\sin\omega}{\sin^2\omega} d\omega.$$

Dès lors

$$\int e^z z^{a-1} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^2\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1}.$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} [\cos(a-1)\omega + i\sin(a-1)\omega][2\cos\omega + i\sin\omega]e^{-i\cot\omega} \\ -[\cos(a-1)\omega - i\sin(a-1)\omega][2\cos\omega - i\sin\omega]e^{i\cot\omega} \end{array} \right\} d\omega$$

$$= 2i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^2\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1} \left\{ \begin{array}{l} -[\cos a\omega + \cos\omega\cos(a-1)\omega]\sin(\cot\omega) \\ +[\sin a\omega + \cos\omega\sin(a-1)\omega]\cos(\cot\omega) \end{array} \right\} d\omega$$

$$= 2i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^2\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1} \left\{ \sin[a\omega - \cot\omega] + \cos\omega\sin[(a-1)\omega - \cot\omega] \right\} d\omega$$

$$= i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^2\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1}\left\{3\sin[a\omega-\cot\omega]+\sin[(a-2)\omega-\cot\omega]\right\}d\omega$$

$$= i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{e^{-\cot^2\omega}}{(\sin\omega)^a}(-\cot\omega)^{a-1}\left\{3\sin[a\omega-\cot\omega]+\sin[(a-2)\omega-\cot\omega]\right\}\frac{d\omega}{\sin^2\omega}.$$

$$= i\int_0^{\infty}e^{-x^2}(1+x^2)^{\frac{a}{2}}x^{a-1}\left\{3\sin[x+a\operatorname{arc}\cot(-x)]+\sin[x+(a-2)\operatorname{arc}\cot(-x)]\right\}dx$$

Donc

$$I(a)=\frac{1}{2\sin a\pi}\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^{a-1}(1+x^2)^{\frac{a}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{3\sin[x+a\operatorname{arc}\cot(-x)]+\sin[x+(a-2)\operatorname{arc}\cot(-x)]\right\}dx.$$

# SUR UNE RELATION DONNÉE PAR M. CAYLEY DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

**Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler**

PAR

CH. HERMITE.

Le n° d'Octobre 1882, du Bulletin des Sciences Mathématiques de M. DARBOUX, contient à la page 215, une équation intéressante pour la théorie des fonctions elliptiques, qui a été découverte par M. CAYLEY, et donnée par l'illustre géomètre sous la forme suivante. Supposons les quatre quantités $u$, $v$, $r$, $s$, assujetties à la condition

$$u + v + r + s = 0,$$

on aura:

$$\begin{aligned}
&- k'^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \\
&+ \quad \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \\
&- \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}
\end{aligned}$$

Cette équation remarquable se démontre facilement au moyen des formules dont je fais usage depuis longtemps dans mes leçons de la Sorbonne, et qui donnent la décomposition en élements simples, des trois quantités:

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x + a), \qquad \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x + a), \qquad \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x + a).$$

Soit

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

la première de ces formules, n'est autre que la relation fondamentale de JACOBI, à savoir:

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)];$$

nous avons ensuite

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a - \frac{\operatorname{dn} a}{k^2 \operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)]$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)].$$

Cela étant, si l'on fait $u = x$ et $r + s = a$, de sorte qu'on ait $v = -x - a$, la relation à établir devient

$$\begin{aligned} & k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \\ + & \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \\ - & \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}$$

En employant maintenant les formules que je viens de rappeler, et posant pour abréger:

$$U = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) - Z(a)]$$

on trouve

$$\begin{aligned} & U k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s (\operatorname{cn} a - U \operatorname{dn} a) \\ & \qquad - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \left(\frac{\operatorname{dn} a}{k^2} - U \operatorname{cn} a\right) = -\frac{k'^2}{k^2} \end{aligned}$$

ou bien:

$$\begin{aligned} & (k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{cn} a) U \\ & \qquad + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire voir que l'on a:

$$k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{cn} a = 0$$

$$\operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}$$

sous la condition $r + s = a$. Soit $r = -x$, et par conséquent $s = a + x$, les relations que nous obtenons ainsi, à savoir

$$k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) + \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) - \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) \operatorname{dn} a = 0$$

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}$$

reviennent exactement à celles qui résultent des formules de décomposition en éléments simples que nous venons d'appliquer, en éliminant la quantité désignée par $U$. On trouve ainsi en effet:

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{dn} a$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{cn} a;$$

or en multipliant la première de ces égalités par $\operatorname{dn} a$, la seconde par $\operatorname{cn} a$, on en conclut, en retranchant membre à membre, la première des deux équations à établir. La suivante s'obtient par un calcul semblable, qui revient à l'élimination de la quantité $\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a)$.

# ZUR THEORIE DER DISCRIMINANTEN

VON

EUGEN NETTO

in BERLIN.

Die nachstehende Arbeit knüpft an Untersuchungen an, welche ich früher unter gleichem Titel im »Journal für reine und angewandte Mathematik» B. XC, 164—186 veröffentlicht habe. Der Grund, welcher mich bewog, auf diese Untersuchungen zurückzukommen, ist in einigen Bemerkungen, vorzüglich aber in den neuen, grundlegenden Anschauungen zu suchen, die sich in der bedeutenden Abhandlung des Herrn KRONECKER: »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen» finden. Zu jenen Bemerkungen zähle ich die (S. 22) gemachte Angabe einer Gleichung, für die es Wurzelgattungen ohne Gattungsdiscriminanten giebt; sie rief die Untersuchungen in § 5 und § 6 der nachfolgenden Arbeit hervor; — ferner den Satz auf S. 42 (§ 13) über Functionen einer Gattung, deren conjugirte sämmtlich von einander verschieden sind; sie veranlasste die Ableitungen in § 2.

Besonders aber waren es die im zweiten Teile der KRONECKER'schen Abhandlung auseinandergesetzten Principien über Divisorensysteme, welche mich bewogen, den einfachen Fall der Discriminanten algebraischer Gleichungen in dem neuen, überraschenden Lichte dieser tiefliegenden und doch ihrem Wesen nach so einfachen Grundanschauungen von neuem zu behandeln. Die algebraische und die substitutionentheoretische Methode der Untersuchung weisen sich hierbei, als in wichtigen Punkten einander ergänzend aus, so dass es nicht angethan schien, die eine zu Gunsten der anderen zu unterdrücken.

## § 1.

Es ist für unsere Untersuchungen ein Punkt von besonderer Wichtigkeit, dass auf die Natur der Discriminante

$$D_\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)^2(\varphi_1 - \varphi_3)^2 \cdots (\varphi_{\rho-1} - \varphi_\rho)^2$$

einer gegebenen $\rho$-wertigen Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der $n$ von einander unabhängigen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nur solche algebraischen Beziehungen von wesentlichem Einfluss sind, welche in der Gleichsetzung zweier oder mehrerer der Elemente $x$ bestehen.

Um den Kern dieser Verhältnisse klarzulegen, müssen wir einige elementare und fundamentale Theoreme vorausschicken, deren Bedeutung darin liegt, dass zwischen vorher willkürlichen Grössen bestimmte algebraische Relationen eingeführt werden; dass also sogenannte »allgemeine» Sätze bei tatsächlich gegebenen Verhältnissen Anwendung finden sollen.

Wir verstehen unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ willkürliche Constanten, unter $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorläufig unbestimmte Grössen und betrachten die lineare Verbindung der $x$

$$(1) \qquad \psi_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Bei allen möglichen Vertauschungen der $x$ untereinander erhält $\psi_1$ eine Reihe von Werten, die ihre Formen nach von einander verschieden sind. Die Operationen der Vertauschungen bezeichnen wir als Substitutionen; es giebt deren $n!$, falls man diejenige Substitution mitzählt, welche keins der $x$ von seiner Stelle rückt. Es mögen $s_1, s_2, \ldots s_{n!}$ diese Substitutionen sein, und $s_1$ soll die letzt erwähnte identische Substitution bedeuten. Wir verstehen ferner unter $\psi_a$ denjenigen Wert von $\psi_1$, der durch die Anwendung von $s_a$ aus $\psi_1$ hervorgeht. (Setzen wir etwa

$$\chi_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

so sei auch hier $\chi_a$ der Wert von $\chi$ welcher durch $s_a$ aus $\chi_1$ hervorgerufen wird.) Der Index des Ausdruckes wird also durch die Substitution bestimmt.

Falls man für die $x$ besondere Werte einsetzt, brauchen die $n!$ Ausdrücke $\psi_a$ ihren Werten nach nicht sämmtlich von einander verschieden

zu sein. Sind einige der $x$ untereinander gleich, so ist eine derartige Verschiedenheit nicht einmal mehr möglich. Über die hierbei eintretenden Umstände war bisher, meines Wissens, nur der folgende Satz bekannt: *Es können beliebige Beziehungen algebraischer Art zwischen $x_1, x_2, \ldots. x_n$ bestehen; so bald durch dieselben nur nicht die Gleichheit einiger der Elemente $x$ festgesetzt wird, ist es stets möglich, beliebig viele Systeme $\alpha_0, \alpha_1, \ldots. \alpha_n$ der Constanten $\alpha$ zu liefern, für welche alle $n!$ Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \ldots. \psi_{n!}$ ihren numerischen Werten nach von einander verschieden sind.* (¹)

Diesen Satz wollen wir erweitern und die neue Fassung beweisen. Die Erweiterung bezieht sich auf Folgendes: Wenn für Gleichsetzungen der $x$ gewisse Gruppen von Werten der $\psi$ bei jeder Wahl der $\alpha$ einander gleich werden, dann kann der hierdurch bestimmte Charakter dadurch nicht geändert werden, dass man neue Beziehungen unter den $x_1, \ldots. x_n$ festlegt, welche keine neuen Gleichsetzungen der $x$ zur Folge haben.

Wir setzen voraus, es wäre etwa

$$\text{(A)} \qquad x_{a_1} = x_{a_2} = \cdots = x_{a_\mu}; \qquad x_{b_1} = x_{b_2} = \cdots = x_{b_\nu}.$$

Dann werden ersichtlich von den $n!$ Ausdrücken $\psi_1, \ldots. \psi_{n!}$ genau $\frac{n!}{\mu!\nu!} = \sigma$ Gruppen von je $\mu!\nu!$ Ausdrücken je einen und denselben Wert annehmen, so dass für $\psi$ höchstens $\sigma$ verschiedene Werte bestehen können. Einem beliebigen $\psi_\alpha$ werden nämlich alle diejenigen $\psi$ gleich, welche aus ihm durch Substitutionen hervorgehen, in denen nur $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots. x_{a_\mu}$ und ebenso $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots. x_{b_\nu}$ unter sich vertauscht werden. Wir wollen diese Substitutionen, deren Anzahl $\mu!\nu!$ ist, zum Unterschiede von den übrigen mit $t_1, t_2, t_3, \ldots.$ bezeichnen; wir behalten aus jeder der $\sigma$ Gruppen einen Repräsentanten zurück, $\psi'_1, \psi'_2, \ldots. \psi'_\sigma$. Jetzt nehmen wir weiter an, es träten neue Beziehungen unter den $x$ auf, welche durch die irreductiblen Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad F_1(x_1, \cdots x_n) = 0, \cdots, F_k(x_1, \cdots x_n) = 0$$

dargestellt werden, und über deren Natur lediglich das Eine festgesetzt sei, dass durch sie *keine weiteren Gleichsetzungen* unter den $x$ hervorgerufen werden. Dann lassen sich, wie die $F_k$ auch sonst beschaffen sind,

(¹) Vgl. meine »Substitutionentheorie« § 32.

unendlich viele Systeme der $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ derart bestimmen, dass nach wie vor $\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_\sigma$ von einander verschieden bleiben, dass es demnach $\sigma$ numerisch von einander verschiedene Werte des $\psi$ giebt.

Um den Beweis zu führen, setzen wir

$$\psi'_k - \psi'_\lambda = a_1(x_{k_1} - x_{\lambda_1}) + a_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \cdots + a_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n}).$$

Hier werden $\mu$ der $x_k$ und ebensoviele der $x_\lambda$ gleich $x_{a_1}$; $\nu$ der $x_k$ und ebensoviele der $x_\lambda$ gleich $x_{b_1}$. Unseren Festsetzungen gemäss können die Coefficienten der $\alpha$ nicht sämmtlich verschwinden; denn dies träte nur dann ein, wenn $\psi'_\lambda$ aus $\psi'_k$ durch eine Substitution $t$ ableitbar wäre, was ja aber ausgeschlossen ist. Wir betrachten das über alle Combinationen von je zwei $\psi'$ ausgedehnte Product

$$\Pi(\psi'_k - \psi'_\lambda) = \Pi[a_1(x_{k_1} - x_{\lambda_1}) + a_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \cdots + a_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n})].$$

Unsere Behauptung kann jetzt die Form annehmen: das aufgestellte Product verschwindet nicht für alle Wertsysteme der $\alpha$. Wir sortiren die Factoren des Products der rechten Seite; zuerst betrachten wir die, bei denen der Coefficient von $\alpha_1$ nicht Null ist; dann die, bei denen er Null ist, während der von $\alpha_2$ nicht verschwindet; dann die, bei denen die beiden ersten Coefficienten Null sind, der dritte jedoch nicht; u. s. f. Bei der ersten Klasse können wir es durch passende Wahl von $\alpha_1$, ohne Beschränkung von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ dahin bringen, dass die zugehörigen Factoren nicht Null werden. Dazu ist nur nötig, dass $\alpha_1$ keinen der Werte

$$-\frac{a_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \cdots + a_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n})}{x_{k_1} - x_{\lambda_1}}$$

erhält, deren Zahl endlich ist und deren Wert wegen des nicht verschwindenden Nenners angebbar sein wird. Bei der zweiten Klasse können wir dasselbe durch passende Wahl von $\alpha_2$ ohne Beschränkung von $\alpha_3, \alpha_4 \ldots$ erlangen u. s. f. Wählt man demgemäss $\alpha_n$ in den Factoren der letzten Klasse (für welche die Coefficienten von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ verschwinden) ganz beliebig, bestimmt $\alpha_{n-1}$ durch das Nichtverschwinden der Factoren der vorletzten Klasse u. s. f., dann erhält man Systeme von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, für die kein $\psi'_k$ einen $\psi'_\lambda$ gleich wird. Eine Einwirkung der $F_1, F_2, \ldots F_k$

ist also überhaupt nicht zu bemerken. Hieraus folgt: *Auf die Gleichheit der verschiedenen Werte von linearen Ausdrücken der Form*

$$\psi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

*haben nur diejenigen Beziehungen unter den $x$ bestimmenden, d. h. von der Wahl der $a$ unabhängig bestehenden Einfluss, welche in der Gleichsetzung einzelner $x$ selbst begründet sind.*

## § 2.

Wir setzen zunächst für den ersten Teil dieses Paragrafen die $x$ wieder als völlig unbestimmte Grössen voraus.

Einer jeden unter den $x_1, x_2, \dots x_n$ möglichen *Functionengattung* (1) entspricht eine charakteristische *Substitutionengruppe*, welche »die Permutationen der Gattung» enthält. Dies heisst: die Gruppe $G$ der Gattung $\mathfrak{G}$ umfasst alle und auch nur diejenigen Substitutionen, welche die Form der sämmtlichen zur Gattung $\mathfrak{G}$ gehörigen Functionen $y, y', y'', \dots$ nicht verändern. Wenn diese Substitutionen

$$s_1 = 1,\ s_2,\ s_3, \cdots s_r$$

sind, so deuten wir die Gruppe $G$ wohl auch kurz durch

$$G = [s_1, s_2, s_3, \cdots s_r]$$

an. Die Zahl $r$, die *Ordnung der Gruppe*, zeigt demnach, für wie viele Substitutionen die Functionen $y, y', y'', \dots$ der Gattung $\mathfrak{G}$ ungeändert bleiben; hieraus folgt, dass diese Functionen je $\frac{n!}{r} = \rho$ verschiedene Werte besitzen. Die zu $y^{(a)}$ gehörigen mögen $y_1^{(a)}, y_2^{(a)}, \dots y_\rho^{(a)}$ sein, derart, dass wir $y^{(a)}$ auch $= y_1^{(a)}$ setzen; alle diese Werte heissen die »*conjugirten Werte*» von $y^{(a)}$; sie bestimmen »*conjugirte Gattungen*» $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{G}_\rho$, wo wir auch $\mathfrak{G}$ gleich $\mathfrak{G}_1$ annehmen; zu ihnen gehören »*conjugirte Gruppen*» $G_1, G_2, \dots G_\rho$, wo endlich auch $G$ mit $G_1$ identisch sein soll. Die $\rho$ conjugirten Werte

(1) Über die hier benutzte Terminologie, welche sich der von Herrn KRONECKER gebrauchten genau anschliesst vgl. L. KRONECKER: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen; S. 6 ff.

einer Function $y$ sind die Wurzeln einer Gleichung $\rho^{ten}$ Grades, deren Coefficienten dem aus den elementaren symmetrischen Functionen

$$(1)\quad \mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\quad \mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \cdots\quad \mathfrak{f}_n = x_1x_2\cdots x_n$$

gebildeten Rationalitätsbereiche angehören.

Da conjugirte Werte aus einander durch Anwendung gewisser Substitutionen hervorgehen, so besitzen sie sämmtlich denselben Typus. Wir wollen eine der Substitutionen, welche $y_1$ in $y_k$ umwandelt mit $\sigma_k$ bezeichnen; dann erhält man sämmtliche Substitutionen derselben Eigenschaft durch $s_\lambda\sigma_k$ $(\lambda = 1, 2, \dots r)$ oder kurz durch $G_1 . \sigma_k$. Ist $y^{(a)}$ eine andere Function derselben Gattung, so bezeichnen wir mit $y_k^{(a)}$ denjenigen ihrer conjugirten Werte, welcher aus $y_1^{(a)}$ durch $G_1 . \sigma_k$ abgeleitet werden kann.

Sämmtliche $n!$ Substitutionen lassen sich in die folgende Tabelle einordnen

$$(C)\qquad \begin{array}{llll} s_1 = 1, & s_2, & \cdots\ s_r; & \mathfrak{G}_1 \\ s_1\sigma_2, & s_2\sigma_2, & \cdots\ s_r\sigma_2; & \mathfrak{G}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1\sigma_\rho, & s_2\sigma_\rho, & \cdots\ s_r\sigma_\rho; & \mathfrak{G}_\rho \end{array}$$

bei welcher die $i^{te}$ Zeile alle diejenigen und nur die Substitutionen enthält, welche $y_1^{(a)}$ in $y_i^{(a)}$ umwandeln.

Wir gehen nach der Recapitulation dieser bekannten Begriffe und Bezeichnungen dazu über, Functionen $y^{(a)}$ mit Hülfe der im ersten Paragrafen aufgestellten $\psi$ zu bilden.

Wenden wir $G_1$ auf $\psi_1$ an, so entstehen dadurch $r$ Ausdrücke

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3, \cdots, \psi_r,$$

welche ihrer Form nach von einander verschieden sind. Jede symmetrische Function derselben bleibt für $G_1$ ungeändert und gehört also zur Gattung $\mathfrak{G}_1$ oder zu einer unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattung. Richtet man jedoch die symmetrische Function so ein, dass sie nur dann ungeändert bleibt, wenn die $\psi$ mit einander vertauscht werden, dann gehört sie wirklich zur Gattung $\mathfrak{G}_1$. Bei

$$(2)\qquad y = \psi_1^c + \psi_2^c + \psi_3^c + \cdots + \psi_r^c$$

kann der erstere Fall für $e = 1$ eintreten; denn hier bleibt möglicherweise $\psi_1$ auch ungeändert für Substitutionen, welche nicht zu $G_1$ gehören. Für ein unbestimmtes $e$ geht dies aber nicht mehr an.

Aus der Tabelle (C) erkennt man, dass alle $n!$ Ausdrücke von $\psi$ in die $\rho$ conjugirten $y_1, y_2, \dots y_\rho$ als Summanden eingehen; jeder Wert von $\psi$ kommt überhaupt nur einmal vor; es ist also schon durch das Auftreten eines $\psi_\mu$ das zugehörige $y_\alpha$ unzweideutig bestimmt: es ist dasjenige, in dessen Zeile der Tabelle (C) die Substitution $s_\mu$ auftritt, welche $\psi_1$ in $\psi_\mu$ umändert. Dieselbe Substitution $s_\mu$ führt demnach auch $y_1$ in $y_\alpha$ über. Allgemeiner: *enthält $y_k$ den Summanden $\psi_k^e$, $y_\lambda$ den Summanden $\psi_\lambda^e$ und geht $\psi_k$ in $\psi_\lambda$ durch die Substitution $\tau$ über, so geht auch $y_k$ in $y_\lambda$ durch dieselbe Substitution über.*

Wir haben bisher in diesem Paragrafen die $x$ als unbestimmte Grössen angenommen; von jetzt ab wollen wir die Voraussetzungen (A) und (B) des ersten Paragrafen gelten lassen. Wir wählen die $\alpha$ derart, dass

$$\psi'_1, \psi'_2, \dots \psi'_\sigma \qquad \left(\sigma = \frac{n!}{\mu!\nu!}\right)$$

von einander verschieden sind. Dann erkennt man ohne jede Schwierigkeit, dass die Willkür, die bei der Wahl von $\alpha_0$ herrscht, dazu benutzt werden kann, auch die Moduln der $\psi'$ von einander verschieden zu machen. Hierbei sei

$$\text{mod. } \psi'_1 > \text{mod. } \psi'_2 > \dots > \text{mod. } \psi'_\sigma.$$

Endlich kann man den ganzzahligen, sonst aber beliebigen Exponenten $e$ so gross annehmen, dass man erhält

$$\psi'^e_1 > \rho(\psi'^e_2 + \psi'^e_3 + \dots + \psi'^e_\sigma)$$
$$\psi'^e_2 > \rho(\psi'^e_3 + \psi'^e_4 + \dots + \psi'^e_\sigma)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi'^e_{\sigma-1} > \rho \cdot \psi'^e_\sigma;$$

der Kürze halber sind die $\psi'$ statt ihrer Moduln hingeschrieben. Aus unseren Festsetzungen ergiebt sich, dass eine Gleichung

(3) $$m_1\psi'^e_1 + m_2\psi'^e_2 + \dots + m_\sigma\psi'^e_\sigma = \mu_1\psi'^e_1 + \mu_2\psi'^e_2 + \dots + \mu_\sigma\psi'^e_\sigma \qquad (m, \mu \leqq \rho)$$

nur dann bestehen kann, wenn alle entsprechenden $m$, $\mu$ einander gleich sind.

Unter den jetzt geltenden Annahmen (A), (B) geht die oben gebildete Function $y_i$ aus ihrer allgemeinen Gestalt

$$(2') \qquad y_i = \psi^e_{i_1} + \psi^e_{i_2} + \cdots + \psi^e_{i_r}$$

in die besondere Form

$$y_i = m_{i_1}\psi'^e_{i_1} + m_{i_2}\psi'^e_{i_2} + \cdots + m_{i_t}\psi'^e_{i_t}$$

über, da gewisse Werte $\psi_{i_1}$, $\psi_{i_2}, \ldots$ gleich $\psi'_{i_1}$ u. s. w. werden können. Sollte nun durch (A), (B) eine Gleichheit zweier conjugirter Werte hervorgerufen werden, etwa

$$y_i = y_k\,,$$

so folgt wegen (3) dass $y_i$, $y_k$ dieselben Summanden $\psi'^e_a$ enthalten. Dies erlaubt den Rückschluss, dass vor dem Gelten von (A), (B) beide conjugirte Werte $y_i$, $y_k$ nur Summanden derjenigen Gruppe enthielten, als deren Repräsentanten wir $\psi'_a$ zurückbehalten haben. Zwei derartige Summanden können durch Substitutionen $t$ in einander verwandelt werden, in denen nur die $x_{a_1}$, $x_{a_2}, \ldots x_{a_\mu}$ und die $x_{b_1}$, $x_{b_2}, \ldots x_{b_\nu}$ sich untereinander umstellen. Nach unseren obigen Ausführungen leitet dann $t$ den ganzen Summandencomplex der Function $y_i$ in den von $y_k$ über.

Dass umgekehrt alle diejenigen Functionen, welche durch Substitutionen $t$ aus einander hervorgehen, durch (A), (B) einander gleich werden, ist selbstverständlich; es geht aber aus unserer Beweisführung auch hervor, dass dieser a priori ersichtliche Fall auch der einzige ist, in welchem conjugirte Werte $y_i^{(a)}$, $y_k^{(a)}$ einer jeden Function $y^{(a)}$ der Gattung einander gleich werden; und es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass nur die Bedingungen (A) nicht aber die Festsetzungen (B) einen Einfluss dabei haben.

Herr Kronecker hat gezeigt,(1) »*dass sich für irgend welche gegebenen Werte* $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ *von (1) — vorausgesetzt nur, dass nicht zwei der* $x$ *einander gleich werden — stets unendlich viele specielle Functionen jeder Gattung* $\mathfrak{G}$ *bestimmen lassen, deren sämmtliche conjugirte unter einander ver-*

(1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie u. s. w., S. 42.

*schieden sind.»* Diesem Satze können wir jetzt folgende Erweiterung zur Seite stellen: ***Auf die Gleichheit conjugirter Werte aller Functionen einer Gattung haben nur diejenigen Beziehungen unter den $x$ einen bestimmenden Einfluss, welche in der Gleichsetzung einzelner $x$ bestehen.***

Beachtenswert ist ferner noch der Umstand, dass wir Functionen $y$ construirt haben, bei denen aus $y_i = y_k$ auf die Existenz der Substitution $t$ geschlossen werden kann, welche $y_i$ in $y_k$ verwandelt. Denn weil die Substitution von der Wahl der Function $y$ unabhängig ist, so folgt, dass für jedes beliebige $y^{(a)}$ stets $y_i^{(a)} = y_k^{(a)}$ sein wird. Das Gleichwerden conjugirter Werte findet also seinen genauen Ausdruck in Gruppeneigenschaften. Somit ist auch ersichtlich: *Verschwindet die Discriminante $D_y$ jeder beliebigen Function $y$ der Gattung $\mathfrak{G}$ für gewisse Beziehungen $(A')$, $(B)$ unter den $x$, so ist dieses Verschwinden nicht nur für $D_y$, sondern auch für gewisse Differenzen $y_i - y_k$ invariant.*

## § 3.

Der zuletzt aufgestellte Satz erlaubt uns, statt des Verschwindens der Discriminante selbst, dasjenige der Differenzen $y_i - y_k$ zu untersuchen.

Herr Kronecker hat für Functionen mit mehreren Veränderlichen eine Erweiterung des Begriffes der Division gegeben.(¹) Verschwindet eine ganze Function $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sobald gewisse Beziehungen platzgreifen, welche durch die Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad F_1(x_1, \cdots x_n) = 0, \cdots, F_k(x_1, \cdots x_n) = 0$$

dargestellt werden, dann ist $g$ als ganze lineare Function von $F_1, \ldots, F_k$ darstellbar, mit Coefficienten, welche rationale ganze Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind:

$$\text{(1)} \qquad g(x_1, \cdots x_n) = P_1(x_1, \cdots x_n)F_1(x_1, \cdots x_n) + \cdots + P_k(x_1, \cdots x_n)F_k(x_1, \cdots x_n).$$

Wir schreiben dies den Einführungen des Herrn Kronecker entsprechend

$$\text{(1')} \qquad g(x_1, \cdots x_n) \equiv 0, \qquad (\text{modd. } F_1, F_2, \cdots, F_k)$$

nennen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ein *»Modul- oder Divisoren-System $k^{ter}$ Stufe»* von $g$, und sagen, dass $g$ dieses Divisorensystem *enthält.*

(¹) a. a. O. S. 72 ff.

Hiernach können wir die Resultate unserer bisherigen Untersuchungen folgendermassen aussprechen:

1) *Jedes Modulsystem der Discriminanten $D_y$ der Gattung* 𝔊 *ist gleichzeitig Modulsystem einer bestimmten und durch die Gruppe $G$ der Gattung bestimmbaren Differenz $y_i - y_k$, unabhängig von der Wahl von $y$.*

2) *Alle Modulsysteme der Discriminanten $D_y$ bez. der Differenzen $y_i - y_k$ bestehen aus Functionen der Form*

$$F_{\alpha,\beta} = x_\alpha - x_\beta.$$

3) *Die Modulsysteme von $y_i - y_k$ werden sämmtlich durch diejenigen Substitutionen bestimmt, welche $y_i$ in $y_k$ umwandeln.* Hierzu ist es nur nötig, dass alle diejenigen Elemente $x$, welche je einen Cyklus einer solchen Substitution bilden, einander gleich gesetzt werden.

Es fragt sich nun umgekehrt, ob aus jeder Substitution, welche $y_i$ in $y_k$ umwandelt, ein Modulsystem gebildet werden kann. Dies ist nach dem, am Schlusse des vorigen Paragrafen Besprochenen zwar an und für sich klar; jedoch müssen einige hierbei auftretende Punkte noch weiter untersucht werden. Dieselben beziehen sich auf die Zusammensetzung von Modulsystemen. Wir wollen zunächst an einem einfachen Beispiele die Frage klarstellen.

Es sei in dem Bereiche der vier Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ eine Functionengattung 𝔊 durch

$$G_1 = [1, (x_1 x_2 x_3), (x_1 x_3 x_2)]$$

bestimmt. Eine der zur Gattung gehörigen Functionen ist

$$y_1 = x_1^\alpha x_2^\beta + x_2^\alpha x_3^\beta + x_3^\alpha x_1^\beta.$$

Der conjugirte Wert

$$y_2 = x_4^\alpha x_2^\beta + x_2^\alpha x_3^\beta + x_3^\alpha x_4^\beta$$

von $y_1$ ist durch die Substitutionen

$$G_1 s_2 = \{(x_1 x_4), (x_1 x_2 x_3 x_4), (x_1 x_3 x_2 x_4)\}$$

aus dem ersteren Werte entstanden. Wir erhalten demnach drei in $y_1 - y_2$ enthaltene Divisorensysteme, bemerken aber zugleich, dass verschiedene Substitutionen gleiche Modulsysteme hervorrufen können, sowie dass einige

Modulsysteme erfüllt sein können, falls bereits andere einfachere befriedigt sind. Die hier auftretenden sind

$$\text{I)}\quad x_1 - x_4; \qquad \text{II)}\quad x_1 - x_4;\quad x_1 - x_2;\quad x_1 - x_3;$$

Dass jedes derselben wirklich in

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (x_1^\alpha - x_4^\alpha)x_2^\beta + (x_1^\beta - x_4^\beta)x_3^\alpha \\ &= (x_1 - x_4)\{[x_1^{\alpha-1} + x_1^{\alpha-2}x_4 + \cdots]x_2^\beta + [x_1^{\beta-1} + x_1^{\beta-2}x_4 + \cdots]x_3^{\alpha}\} \end{aligned}$$

enthalten ist, leuchtet ein; dass ferner ein aus I), II) componirtes System ([1]) nicht vorkommt, ist gleichfalls daraus ersichtlich, dass der zweite Factor überhaupt für keine Gleichsetzungen der $x$ mehr zu Null wird.

Wir werden daher, um die Divisoren von $y_k - y_i$ zu ermitteln, aus den Substitutionen des Complexes $G_i s_n$ nur diejenigen zur Bildung von Modulsystemen verwenden, bei denen die Elemente der einzelnen Cykel nicht gänzlich in den Elementen der einzelnen Cykel anderer Substitutionen auftreten. (Die früher von mir benutzte Benennung des »Enthaltenseins», durch welche ich diese Beziehung von Substitutionen zu einander andeutete, gebe ich auf, da sie mit der bei Modulsystemen gebräuchlichen Verwendung dieses Wortes nicht übereinstimmt.)

Ein zweites Bespiel mag auf eine weitere hier auftretende Eigentümlichkeit aufmerksam machen. Es sei, wieder in dem Bereiche von vier Variabeln

$$\begin{aligned} G_1 &= [1,\ (x_1x_2x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4x_3x_2)] \\ y_1 &= x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_1^2 \\ y_2 &= x_1x_4^2 + x_4x_3^2 + x_3x_2^2 + x_2x_1^2, \end{aligned}$$

dann wird

$$G_1 s_2 = [(x_1x_3),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3)]$$

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)[x_2 + x_4 - x_1 - x_3].$$

Das Auftreten von $(x_1x_3)$ und von $(x_2x_4)$ in dem Complexe $G_1s_2$ äussert sich durch das Vorhandensein der beiden Factoren $(x_1 - x_3)$ und

---

([1]) Vgl. KRONECKER, a. a. O. S. 77 ff. — sowie auch die weiteren Ausführungen dieses Paragrafen.

$(x_2 - x_4)$; dasjenige von $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, $(x_1 x_4)(x_2 x_3)$ durch das Verschwinden des letzten Factors

$$\psi = (x_2 + x_4) - (x_1 + x_3)$$

für die beiden Gleichungssysteme

$$\text{I)}\quad x_1 - x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0; \qquad \text{II)}\quad x_1 - x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0,$$

welche den Modulsystemen

$$\text{I')}\quad x_1 - x_2,\ x_3 - x_4; \qquad \text{II')}\quad x_1 - x_4,\ x_2 - x_3$$

entsprechen. Dass $\psi$ aber auch das aus I'), II') componirte Modulsystem in sich schliesst, ist nicht unmittelbar ersichtlich noch auch richtig.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Klärung dieser Verhältnisse; dazu müssen wir, wie dies ja bei dem vorliegenden Thema natürlich ist, auf die grundlegenden Untersuchungen des Herrn Kronecker unser Augenmerk richten. Wir entnehmen denselben folgende begrifflichen Festsetzungen: (1)

I. Es ist für zwei Functionen $M, M'$ von $n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$M \equiv M' \quad (\text{modd. } M_1,\ M_2,\ M_3, \cdots),$$

wenn die Differenz $M - M'$ das Modulsystem $(M_1,\ M_2,\ M_3, \ldots)$ enthält.

II. Ein Modulsystem $(M_1,\ M_2, \ldots)$ enthält ein anderes $(M'_1,\ M'_2, \ldots)$ wenn jedes Element des ersteren das Modulsystem $(M'_1,\ M'_2, \ldots)$ enthält. Wenn jedes der beiden Modulsysteme das andere enthält, so sind sie einander *aequivalent*, und dies wird durch: $(M_1,\ M_2, \ldots) \sim (M'_1,\ M'_2, \ldots)$ bezeichnet.

III. Ein Modulsystem $(M_1,\ M_2, \ldots)$, dessen einzelnen Elemente durch die verschiedenen Producte von je zwei Elementen $M'_h M''_k$ zweier Modulsysteme $(M'_1,\ M'_2, \ldots)$, $(M''_1,\ M''_2, \ldots)$ gebildet werden, heisst *aus diesen beiden Systemen zusammengesetzt oder componirt*, und diese beiden Systeme sollen, wegen der Analogie der Composition mit der Multiplication, auch als *Factoren* bezeichnet werden.

---

(1) a. a. O. S. 77—78; 84; 85. Hier findet man die unter Nr. I bis IX gegebenen Sätze; X ist auf S. 85 VII, sowie auf persönliche Mitteilungen seitens des Herrn Kronecker gegründet.

Der Ausdruck »Composition« soll ohne Weiteres auf aequivalente Systeme übertragen und demnach auch jedes, dem System $(M'_h M''_i)$ aequivalente System als aus den beiden Systemen $(M')$, $(M'')$ componirt bezeichnet werden, so dass die Elemente des componirten Systems als bilineare Functionen der beiderseitigen Elemente $M'$, $M''$ mit ganzen, dem Bereiche angehörigen Coefficienten zu charakterisiren sind.

IV. Ein Modulsystem heisst *irreductibel*, wenn es nicht aus zwei anderen zusammengesetzt ist, deren jedes ein Modulsystem im eigentlichen Sinne des Wortes ist.

V. Eine algebraische Form soll als eine andere Form »enthaltend« bezeichnet werden, wenn das Coefficientensystem der letzteren in dem der ersteren (nach der in II enthaltenen Bestimmung) enthalten ist.

VI. Ist die Form $F$ in $F_0$, aber auch umgekehrt $F_0$ in $F$ enthalten, so sind die beiden Formen einander »*absolut aequivalent*« (Vgl. II).

VII. Eine Form, welche durch wirkliche Multiplication von zwei anderen Formen entsteht, und jede einem solchen Product aequivalente Form soll eine aus den beiden ersten *zusammengesetzte oder componirte Form* genannt werden.

VIII. Eine *eigentlich primitive Form* ist dadurch charakterisirt, dass ihre Coefficienten keinen Divisor irgend einer Stufe mit einander gemein haben. Jede eigentlich primitive Form ist absolut aequivalent Eins.

IX. Eine Form wird als »*nicht zerlegbar*«, »*irreductibel*« oder als »*Primform*« bezeichnet, wenn sie keinem Producte von zwei nicht primitiven Formen des festgesetzten Bereiches aequivalent ist.

X. Die Aequivalenz wie die Primitivität lässt Abstufungen zu: Eine Form ist *uneigentlich primitiv zur* $k^{ten}$ *Stufe*, wenn ihre Coefficienten keine Divisoren von $k^{ter}$ oder niedrigerer Stufe gemeinsam haben. Zwei Formen sind *uneigentlich aequivalent zur* $k^{ten}$ *Stufe*, wenn sie in allen Divisoren von der ersten bis zur $k^{ten}$ Stufe übereinstimmen.

Auf diese letzte Definition können wir uns stützen, um die Modulsysteme in einer unserer Differenzen $y_i - y_k$, wenigstens so weit es für unsere Zwecke erforderlich ist, zu componiren. Wir benutzen dazu den Begriff der uneigentlichen Aequivalenz der $k^{ten}$ Stufe; dann dürfen wir einer Form als Factor eine Form, die uneigentlich primitiv von höherer als der $k^{ten}$ Stufe ist, hinzufügen, weil dadurch der Charakter der Divisoren-Systeme, soweit diese in Frage kommen, nicht geändert wird.

Beschränkt man sich bei unserem zweiten Beispiele, bei welchem die Notwendigkeit einer allgemeineren Auffassung handgreiflich wurde, auf Aequivalenzen, welche die zweite Stufe nicht überschreiten, so sind für die unbestimmten Grössen $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ die Formen

$$\psi, \quad \psi \cdot [u_1(x_1 - x_2) + u_2(x_3 - x_4) + u_3(x_1 - x_4) + u_4(x_2 - x_3)]$$

einander aequivalent. Das letztere Product ist als homogene, lineare Function der vier Producte

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_4), \; (x_1 - x_2)(x_2 - x_3), \; (x_1 - x_4)(x_3 - x_4), \; (x_2 - x_3)(x_3 - x_4)$$

darstellbar, so dass hier möglich ist, zu schreiben, was bei absoluter Aequivalenz nicht anging

$$\psi \equiv 0 \qquad \text{modd.}\ [(x_1 - x_2,\ x_3 - x_4) \cdot (x_1 - x_4,\ x_2 - x_3)].$$

Dieses Vorgehen lässt sich verallgemeinern.

Die Form $F$ möge zwei Divisoren-Systeme besitzen, von denen keins von höherer als der $k^{ten}$ Stufe sein mag, und auch keins in dem andern enthalten sein soll: $(F_1, F_2, \ldots . F_k)$, $(F'_1, F'_2, \ldots . F'_k)$. Durch diese Voraussetzungen wird bewirkt, dass $k < n$, und dass zweitens

$$(F_1, F_2, \cdots \cdot F_k, F'_1, F'_2, \cdots \cdot F'_k)$$

von höherer Stufe ist, als jedes der beiden ersteren Systeme. Aus unseren Annahmen folgen die Gleichungen

$$F = F_1 \cdot P_1 + F_2 \cdot P_2 + \cdots \cdot + F_k \cdot P_k \tag{2}$$

$$F = F'_1 \cdot P'_1 + F'_2 \cdot P'_2 + \cdots \cdot + F'_k \cdot P'_k. \tag{3}$$

Fügt man der Function $F$ den Factor

$$\Phi = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \cdots \cdot + u_k F_k + u'_1 F'_1 + u'_2 F'_2 + \cdots \cdot + u'_k F'_k \tag{4}$$

hinzu, so ändert dieser, da er primitiv von $k^{ter}$ Stufe ist, die jetzt allein wesentlichen Divisoren-Systeme von $F$ nicht. Nun ist

$$F \cdot \Phi = \sum_{h=1}^{k} F'_h \cdot P'_h \cdot [u_1 F_1 + \cdots \cdot + u_k F_k] + \sum_{h=1}^{k} F_h \cdot P_h\, [u'_1 F'_1 + \cdots \cdot + u'_k F'_k]$$

$$F \cdot \Phi = \sum_{\lambda, \mu} Q_{\lambda\mu} \cdot F_\lambda \cdot F'_\mu, \tag{5}$$

und daraus erhellt, dass $F.\Phi$ das aus $(F_\lambda)$, $(F'_\lambda)$ componirte Divisorensystem $(F_\lambda F'_\mu)$ besitzt. Aus (5) folgt demnach

$$(6)\qquad F \equiv 0 \qquad \text{modd.}\ [(F_\lambda)\cdot(F'_\lambda)].$$

Diese Methode kann angewendet und fortgesetzt werden, so lange Divisorensysteme, die von höherer als der $k^{ten}$ Stufe sind, für unwesentlich erklärt werden dürfen; es ist dagegen von einer weiteren Composition mit Systemen, die von gleicher Stufe sind wie $\Phi$, abzusehen.

Für $y_i - y_k$ ersehen wir die Möglichkeit der Composition aller mit einander nicht identischer Systeme von gleichem Typus, falls wir uns auf uneigentliche Primitivität der betreffenden Stufe beschränken. Bei identischen Systemen ist eine Composition nicht möglich. Sei etwa, um ein Beispiel hierfür zu geben

$$G_1 = [1,\ (x_1x_3)(x_2x_4)]$$
$$\sigma_2 = (x_1x_2x_3x_4)$$
$$G_2\sigma_2 = \{(x_1x_2x_3x_4),\ (x_1x_4x_3x_2)\}$$

dann gehört zu jedem $y_1 - y_2$ das Modulsystem $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$. Wählen wir

$$y_1 = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 + x_1x_3 + x_2x_4$$

so erhellt, dass $y_1 - y_2$ nur jenes Modulsystem, nicht das Quadrat desselben enthält, weil $y_1 - y_2$ lediglich Glieder erster Dimension umfasst.

## § 4.

Unsere früheren Untersuchungen zeigten, dass man sämmtliche Divisorensysteme einer Differenz $y_i - y_k$, soweit dieselben für die Gattung invariant und also von der Bildung besonderer Functionen $y$ unabhängig sind, aus den Betrachtungen der zugehörigen Gruppe ableiten kann. Diese gewährt hier, wie an vielen anderen Stellen, dieselben Vorteile, welche die KRONECKER'sche »Fundamentalgleichung der Gattung» bietet.

Ferner sahen wir soeben, wie und in wie weit die Divisorensysteme desselben Typus von $y_i - y_k$ eine Composition zulassen. Da endlich eine

Zusammensetzung von Divisorensystemen verschiedener Differenzen $y_i - y_k$, $y_l - y_m, \ldots$ gar keine Schwierigkeiten macht, so sind wir in den Stand gesetzt, alle Divisorensysteme eines bestimmten Typus, welche in $D_y$ eingehen, zu vereinigen und die Potenz anzugeben, in welcher das componirte System als Modulsystem von $D_y$ erscheint.

Es treten hierbei Divisorensysteme von $D_y$ auf, deren Elemente rationale ganze Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ sind. Bezeichnen wir ein Divisorensystem von $y_i - y_k$ mit $(u_1, v_1, w_1, \ldots)$ und die verschiedenen Werte, welche dasselbe bei den Vertauschungen der $x_1, x_2, \ldots x_n$ untereinander annehmen kann, mit $(u_2, v_2, w_2, \ldots), (u_3, v_3, w_3, \ldots), \ldots, (u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha, \ldots), \ldots$, so werden alle diese als Divisorensysteme von $D_y$ auftreten und, da sie von einander verschieden sein sollen, auch ihr Product. Dies ist jedoch nicht so beschaffen, dass alle seine Elemente symmetrisch in den $x_1, x_2, \ldots x_n$ würden. Um den Schwierigkeiten zu entgehen, welche bei den hierhergehörigen Fragen auftreten und deren directe Behandlung sehr eingehende Untersuchungen zu erfordern scheint, schlagen wir einen anderen Weg ein. Wir bilden Functionensysteme der $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$, deren Gesammtheit nur dann verschwindet, wenn vorgeschriebene Gleichheiten unter den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ eintreten, also z. B. nur dann, wenn zwei Paare von Wurzeln oder dann wenn drei Wurzeln einander gleich werden. Wenn nun

$$\Phi_1(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n), \qquad \Phi_2(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n), \cdots \qquad \Phi_K(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n)$$

ein solches System ist, so liefert es das gesuchte Divisorensystem von $D_y$, welches den betreffenden Wurzelgleichheiten angehört, entweder in möglichster Einfachheit oder auch mehrfach. Jedenfalls ist dann, wenn nicht $D_y$ selber, so eine Potenz von $D_y$ als lineare homogene Function der $\Phi$ mit Coefficienten darstellbar, welche ganz und rational in den $\mathfrak{f}$ sind. Bilden wir mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen das symmetrische Product mit den unbestimmten Grössen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$

$$\Pi(u_\alpha + \lambda v_\alpha + \mu w_\alpha + \cdots)$$

und entwickeln dasselbe nach $\lambda, \mu, \ldots$, so geben die Coefficienten eine Reihe von Functionen $\Phi$ mit den gewünschten Eigenschaften, also ein Divisorensystem einer Potenz von $D_y$. Schon die bedeutende Anzahl der

hierbei auftretenden Functionen zeigt, dass das System im Allgemeinen stark reducirt werden kann; die Anzahl der notwendigen Functionen wird höchstens gleich $n+1$ werden.[1] Zu bemerken ist, dass an die Stelle des Factors $u_a + \lambda v_a + \mu w_a + \ldots.$ jeder andere gesetzt werden kann, dessen Verschwinden dasjenige von $u_a, v_a, w_a, \ldots$ nach sich zieht; es ist möglich, durch passende Wahl der Elemente von $u'_a + \lambda v'_a + \mu w'_a + \ldots.$ die Anzahl der Factoren zu verringern und damit die Ausführung der Berechnung zu erleichtern. So wird es sich im Allgemeinen empfehlen, nicht die Differenzen $x_k - x_\lambda$ selbst, sondern ihre Quadrate für $u_a, v_a, \ldots.$ zu benutzen.

Für die Modulsysteme $(x_k - x_\lambda)$, welche die einzigen Divisoren erster Stufe sind, ergiebt sich das bekannte Resultat, *dass $D_\nu$ die Discriminante $\Delta$ der Grundgleichung*

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \equiv x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

*als Factor enthält, falls $\mathfrak{G}$ nicht symmetrisch ist.*

Für die Modulsysteme zweiter Stufe giebt es zwei verschiedene Typen: einmal kann ein solches durch zwei Paare gleicher Wurzeln, ferner auch durch ein Tripel gleicher Wurzeln hervorgerufen werden.

Im ersten Falle wäre das Product

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \Pi[(x_1 - x_2)^2 + \lambda(x_3 - x_4)^2]$$

im zweiten Falle das Product

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \Pi[(x_1 - x_2)^2 + \lambda(x_1 - x_3)^2]$$

zu entwickeln. Weil nun aber in diesen Producten je zwei Factoren einander entsprechen: $(u_a + \lambda v_a)$ und $(v_a + \lambda u_a)$, und die Multiplication derselben

$$(\mathrm{Q}_1) \qquad (u_a v_a + \lambda[u_a^2 + v_a^2] + \lambda^2 u_a v_a)$$

ergiebt, so kann, da hier wie bei allen Formen nur die Coefficienten von Wichtigkeit sind, das Glied mit $\lambda^2$ weggelassen und der Coefficient von $\lambda$ durch $u_a + v_a$ ersetzt werden; denn

$$(\mathrm{Q}_2) \qquad u_a v_a + \lambda[u_a + v_a]$$

[1] Kronecker, a. a. O. S. 37.

giebt durch sein Verschwinden genau dasselbe, was ($Q_1$) ergiebt, dass nämlich $u_a$ und $v_a$ gleichzeitig Null sein müssen. Wir erhalten somit

$$(P'_1) \qquad \Pi\left[(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2 + \lambda\left\{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2\right\}\right]$$

$$(P'_2) \qquad \Pi\left[(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 + \lambda\left\{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2\right\}\right].$$

Noch einfacher wird die Form durch die Wahl anderer $u_a$, $v_a$, z. B.

$$(P''_1) \qquad \Pi[(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 + \lambda(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2]$$

$$(P''_2) \qquad \Pi[(2x_1 - x_2 - x_3)^2 + \lambda(2x_2 - x_3 - x_1)^2].$$

Aus dem ersteren kann man für $n = 4$ das System ableiten

$$\Phi_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)$$

$$\Phi_2 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4) + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) + \\ + (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4);$$

aus dem zweiten für $n = 3$ das System

$$\Psi_1 = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_3 - x_1)(2x_3 - x_1 - x_2)$$

$$\Psi_2 = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_3 - x_1) + (2x_2 - x_3 - x_1)(2x_3 - x_1 - x_2) + \\ + (2x_3 - x_1 - x_2)(2x_1 - x_2 - x_3);$$

beide können dann für die folgenden Bildungen bei $n > 4$ oder $n > 3$ benutzt werden:

$$(P'''_1) \qquad \Pi[\Phi_1 + \lambda\Phi_2]$$

$$(P'''_2) \qquad \Pi[\Psi_1 + \lambda\Psi_2].$$

Auf weitere in diese Untersuchung gehörige Verhältnisse werde ich an einer anderen Stelle genauer eingehen, so dass ich hier davon abbrechen darf. Nur einen Punkt will ich noch hervorheben.

Bilden wir die Galois'sche Resolventengleichung, welche auch kurz (entgegen der von Serret und Jordan benutzten Nomenclatur) als eine *Galois'sche Gleichung* bezeichnet werden mag, so ist die Gruppe derselben gleich Eins. Die Discriminante $D_y$ enthält deswegen alle überhaupt nur

möglichen Divisorensysteme und dabei ein jedes in der höchst möglichen Potenz. Wählen wir für die $n!$-wertige Function $y_1$ eine der von mir([1]) angegebenen Bildungen mit unbestimmten Exponenten

$$y_1 = x_1^a x_2^\beta x_3^\gamma \cdot \cdot \cdot \cdot x_n^\varepsilon,$$

dann zeichnen sich die Resultate durch besondere Einfachheit und Übersichtlichkeit aus. Die Differenzen $y_i - y_k$ enthalten je zwei Glieder, deren gemeinsame Factoren weggeworfen werden können. Somit treten unter den Differenzen, welche zu Substitutionen eines bestimmten Typus gehören, verschiedene einfache, charakteristische Bildungen auf, in welche nur die bei den Wurzelgleichheiten (A; § 1) erscheinenden $x$ eingehen. So erhält man in den beiden von uns besprochenen Fällen der Divisorensysteme zweiter Stufe

$$(P_1^{IV}) \qquad \Pi\left(x_1^m x_2^n - x_3^m x_4^n\right),$$

$$(P_2^{IV}) \qquad \Pi\left(x_1^{m+n} - x_2^m x_3^n\right);$$

man erkennt, dass durch das Verschwinden von $n$ solchen Producten Beziehungen von der Form $x_a^a = x_{a'}^a$ constituirt werden, und dass demnach eine passend gewählte $(n+1)^{te}$ Function desselben Typus hieraus den Schluss $x_a = x_{a'}$ u. s. w. ermöglicht.

Die Potenz, in welcher ein Divisorensystem, falls es das darzustellende Gebilde einfach liefert, als Factor von $D_y$ auftritt, ist aus der Betrachtung der Gruppe leicht zu bestimmen, sobald man die gesammte Tabelle (C) als vorliegend ansieht; dagegen wird die Feststellung der Anzahl schwieriger, wenn nur die erste Zeile von (C) nämlich $G_1$ als bekannt gilt. Für den einfachsten Fall, für den Factor $\Delta$, ergiebt sich jedoch auch hier sofort als Exponent

$$\rho[\tfrac{1}{2}\, n(n-1) - q];$$

für den Fall von drei einander gleichen Wurzeln habe ich die Frage gleichfalls erledigt;([2]) es lohnt sich jedoch nicht auf weitere Untersuchungen derselben einzugehen.

([1]) Substitutionentheorie. § 31.

([2]) Journal f. reine u. angewandte Mathematik. B. XC; S. 164, ff.

§ 5.

Wären wir statt von einer allgemeinen von einer speciellen Gleichung $n^{ten}$ Grades ausgegangen, so hätte es sich ereignen können, dass einige oder auch wohl alle Gattungen ganzer Functionen der Wurzeln einen gemeinsamen Teiler, der vorher bei allgemeinen Gleichungen constatirt wurde, nicht mehr besitzen. Diesen Fall wollen wir eingehender untersuchen. Um von der allgemeinen Gleichung

$$(1)\qquad x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n \equiv (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$$

zu einer beliebigen speciellen zu kommen, ist *die Adjungirung* einer einzigen Gattung $\mathfrak{G}_1$ ihrer Wurzeln notwendig und hinreichend. Die so modificirte Gleichung wollen wir mit (1′) bezeichnen. Genau genommen kommen wir dabei aber nicht zu einer einzigen, sondern zu einer ganzen *Classe von Gleichungen*, und von einer solchen gelten die nachstehenden Untersuchungen. Substitutionentheoretisch hat die Adjungirung den Effect, dass bei allen weiteren an (1′) geknüpften Betrachtungen nur diejenigen Substitutionen angewendet werden dürfen, welche zu der Gruppe $G_1$ von $\mathfrak{G}_1$ gehören, da jede zu $\mathfrak{G}_1$ gehörige Function $y_1$ ungeändert bleiben muss. Wählt man als zu behandelnde Gattung der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von (1′) die Gattung $\Gamma''_1$, so gehören zu dieser in dem Bereiche $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ nur diejenigen Substitutionen der Gruppe von $\Gamma''_1$, welche gleichzeitig in $\mathfrak{G}_1$ vorkommen. Wir können daher in diesem Falle $\Gamma''_1$ durch $\mathfrak{G}'_1 = \Gamma''_1 + u\mathfrak{G}_1$ ersetzen und bewirken hierdurch, dass die Gruppe $G'_1$ von $\mathfrak{G}'_1$ eine Untergruppe von $G_1$ wird. Der Quotient der Ordnungen von $G_1$ und $G'_1$ sei $\rho$; dann besitzt jede Function $y'_1$ der Gattung $\mathfrak{G}'_1$ innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ gerade $\rho$ conjugirte Werte $y'_1, y'_2, \ldots y'_\rho$, und der im zweiten Paragrafen aufgestellten Tabelle (C) entspricht hier eine Tabelle (C′), welche in $\rho$ Zeilen alle Substitutionen von $G_1$ und zwar in der ersten derselben alle Substitutionen von $G'_1$ enthält.

Die Untersuchungen des ersten Abschnittes zeigen, dass die Discriminanten $D_{y'}$ aller Functionen $y'$ der Gattung $\mathfrak{G}'$ nur dann einen gemeinsamen Teiler, eine »Gattungsdiscriminante« besitzen,[1] wenn es Transposi-

[1] Von gemeinsamen Zahlenfactoren ist abgesehen. Alle Kreisteilungsgattungen besitzen durch $p$ teilbare Discriminanten; diese gelten nicht als Gattungsdiscriminanten im eigentlichen Sinne.

tionen giebt, welche in $G_1$ aber nicht in $G'_1$ vorkommen, also in (C') ausserhalb der ersten Zeile.

Haben wir uns demnach die Aufgabe zur Lösung vorgelegt: *Es sollen alle Gattungen $\mathfrak{G}_1$ gefunden werden, für welche es Gattungen ohne Gattungsdiscriminante giebt,* — so lässt sich diese jetzt auch folgendermassen formuliren: *Es sollen alle Gruppen $G_1$ gefunden werden, bei denen gewisse Untergruppen $G'_1$ genau dieselben Transpositionen umfassen wie $G_1$.*

Wir teilen hier die Untersuchung, um einen ersichtlichen Fall sofort zu erledigen. *$G_1$ möge überhaupt keine Transpositionen umfassen. Dann enthält keine Gattung der Wurzeln einer hierdurch bestimmten Gleichung eine Gattungsdiscriminante.* Und umgekehrt: *Wenn keine Gattung der Wurzeln einer zu ($\mathfrak{G}_1$; $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, ...., $\mathfrak{f}_n$) gehörigen Gleichung eine Gattungsdiscriminante besitzt, dann kommen in $G_1$ keine Transpositionen vor.* Der einfachste Fall dieser Art ist der, in welchem $\mathfrak{G}_1$ die alternirende oder eine unter ihr enthaltene Gattung darstellt; dasselbe ereignet sich bei der cyklischen, der metacyklischen, der halbmetacyklischen Gattung; ferner bei jeder primitiven Gruppe, deren Ordnung $< n!$. ist, u. s. f.

Zweitens betrachten wir den Fall, *dass $G_1$ Transpositionen besitzt.* Kommen diese nicht sämmtlich in $G'_1$ vor, so treten in die Discriminante $D_{y'}$ als Factor einer oder mehrere der in ($\mathfrak{G}_1$; $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, ....) irreductiblen Teiler, in welche $\Delta$ bei der Adjungirung irgend einer nicht symmetrischen Gruppe $G_1$ zerlegt wird. Wäre nämlich $\Delta$ nach der Adjungirung irreductibel geblieben, so gäbe es in $G_1$ eine Substitution, welche $(x_\alpha - x_\beta)^2$ in $(x_\gamma - x_\delta)^2$ umwandelt, wobei $\alpha$, $\beta$; $\gamma$, $\delta$ beliebige Indices der Reihe 1, 2, ...., $n$ sind; diese Substitution sei $t = \ldots . x_\alpha x_\gamma \ldots . x_\beta x_\delta \ldots .$ Ist jetzt $\sigma = (x_\alpha x_\beta)$ eine von den der Voraussetzung gemäss vorhandenen Transpositionen von $G_1$, so enthält diese Gruppe auch $t^{-1}\sigma t = (x_\gamma x_\delta)$, d. h. alle Transpositionen, und sie wäre sonach gegen die Annahme mit der symmetrischen Gruppe identisch. Potenzen solcher Factoren von $\Delta$ übernehmen hier also die Rolle der Gattungsdiscriminante.

Wir fragen weiter, unter welchen Bedingungen, in dem Falle dass $G_1$ Transpositionen besitzt, genau dieselben auch in $G'_1$ vorkommen, wann also für $\mathfrak{G}'_1$ keine Gattungsdiscriminante besteht. Wir wollen bei der Untersuchung hierüber annehmen, *dass* (1') *irreductibel* sei; wir beschränken uns also, nach der KRONECKER'schen Terminologie, auf die Adjungi-

rung »eigentlicher Gattungen«; nach der CAUCHY'schen auf die »transitiver Gruppen«.

Dann lässt sich sofort constatiren, *dass $G_1$ eine imprimitive Gruppe ist.* Denn eine primitive Gruppe, welche Transpositionen besitzt, wie dies bei $G_1$ zutrifft, muss symmetrisch sein. (Vgl. Substitutionentheorie § 74).

Aus diesem ersten Resultate folgt weiter (ibid. § 222), *dass* (1') *das Resultat der Elimination einer Grösse $x''$ aus zwei algebraischen Gleichungen ist:*

$$g_1(x;\ x'';\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n) = 0, \qquad g''(x'';\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n) = 0.$$

Sollte $g_1(x,\ x'') = 0$ im Gebiete $(x'';\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2, \ldots)$ noch imprimitiv sein, so kann man diese Gleichung als Eliminationsresultat von $x'$ aus den beiden Gleichungen

$$g(x;\ x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0, \qquad g'(x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0$$

auffassen. Wir wollen, um den Abschluss, der sich ja einstellen muss, sofort herbeizuführen, $g$ als primitiv ansehen. Dann erscheint (1') als Resultat der Elimination von $x'$, $x''$ aus

$$(3) \qquad g(x;\ x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0, \qquad g'(x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0, \qquad g''(x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0$$

in der Form

$$(4) \qquad \prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{\beta=1}^{\lambda} g(x;\ x'_{\alpha\beta};\ x''_{\alpha};\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0.$$

Hierbei bedeuten $x''_1,\ x''_2, \ldots x''^k$ sämmtliche Wurzeln von $g''(x'') = 0$; ferner $x'_{\alpha 1},\ x'_{\alpha 2}, \ldots x'_{\alpha\lambda}$ sämmtliche Wurzeln von $g'(x';\ x''_\alpha) = 0$. Endlich wollen wir mit $x_{\alpha\beta 1},\ x_{\alpha\beta 2}, \ldots x_{\alpha\beta\mu}$ die Wurzeln von $g(x;\ x'_{\alpha\beta};\ x''_\alpha) = 0$ bezeichnen.

Die zu (1') resp. (4) gehörigen Substitutionen ordnen wir nunmehr in eine Tabelle ein, deren erste Zeile alle diejenigen enthalten soll, durch welche die beiden ersten Indices nicht berührt werden; die einzelnen Cyklen sind bei ihnen von der Form $(x_{\alpha\beta h} x_{\alpha\beta k} \ldots x_{\alpha\beta m})$. Diese Substitutionen werden erlangt, wenn man die $k.\lambda$ einander ähnlichen Gruppen aufstellt, welche zu den Gleichungen

$$g(x;\ x'_{\alpha\beta};\ x''_\alpha;\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \cdots k;\ \beta = 1,\ 2, \cdots \lambda)$$

gehören; diese seien $\Gamma_{11},\ \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{\alpha\beta}, \ldots$ Die erste Zeile unserer Tabelle enthält dann die Gruppe $(\Gamma_{11},\ \Gamma_{12}, \ldots \Gamma_{\alpha\beta}, \ldots) = H$.

Um die zweite Zeile zu bilden multipliciren wir $H$ mit irgend einer nicht der ersten Zeile enthaltenen Substitution. In Folge der Imprimitivität vertauscht diese Substitution Systeme von Wurzeln, welche durch die beiden ersten Indices charakterisirt werden; dieselbe Vertauschung der Systeme findet dann für die ganze Zeile statt. Hieraus ist zu ersehen, dass nur die erste Zeile der Tabelle Transpositionen der Wurzeln $x$ enthalten kann. Die einander ähnlichen Gruppen $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{\mu\nu}$ müssen somit Transpositionen besitzen; sie sind primitiv, folglich sind sie auch symmetrisch: *demnach ist* $g(x) = 0$ *eine allgemeine Gleichung.*

Nach dieser Zurechtlegung der imprimitiven Gruppe $G_1$ kehren wir zu den obigen Untersuchungen zurück und ersehen jetzt ohne Schwierigkeit das Schlussresultat. $G'_1$ muss alle Transpositionen der ersten Zeile, d. h. die gesammte erste Zeile selbst umfassen; enthält $G'_1$ ferner eine Substitution irgend einer Zeile der Tabelle, so umschliesst $G'_1$ die ganze Zeile; $G'_1$ soll eine Untergruppe von $G_1$ sein und darf demnach nicht alle Zeilen der Tabelle enthalten. Das heisst:

*Um sämmtliche Gruppen $G_1$ aufzustellen, welche mit gewissen Untergruppen $G'$ alle Transpositionen gemeinsam haben, bildet man eine Reihe von irreductiblen Gleichungen*

$$g(x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0, \qquad g'(x', x'', \ldots, x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0,$$

$$g''(x'', \ldots, x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0, \ldots \qquad g^{(\nu)}(x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0,$$

*deren erste eine allgemeine Gleichung in $x$ mit den willkürlichen Parametern $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ ist, eliminirt aus ihnen diese Parameter und bildet $G_1$ als Gruppe der resultirenden Gleichung; $G'_1$ erhält man, wenn man den Gleichungen $g' = 0$, $g'' = 0, \ldots, g^{(\nu)} = 0$ beliebige Gattungen ihrer Wurzeln adjungirt.*

Der § 73 meiner Substitutionentheorie zeigt, wie man auf rein substitutionentheoretischem Wege die fraglichen Gruppen construiren kann. Das einfachste Beispiel bietet sich bei den Gleichungen vierten Grades dar. Nimmt man $g$ und $g'$ vom zweiten Grade, so findet sich das Resultat: *Jede durch Quadratwurzeln lösbare Gleichung vierten Grades besitzt eine Gattung vierwertiger Functionen der Wurzeln, für welche keine Gattungsdiscriminante besteht.* Es ist dieser Ausspruch eine Übersetzung des Satzes, dass alle Transpositionen der Gruppe

$$G_1 = [1, (x_1x_2), (x_3x_4), (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3), (x_1x_3x_2x_4), (x_1x_4x_2x_3)]$$

auch in der Untergruppe

$$G'_1 = [1,\ (x_1x_2),\ (x_3x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4)]$$

auftreten. Weitere Beispiele lassen sich leicht bilden.

## § 6.

Alle die Auseinandersetzungen des vorigen Paragrafen, welche sich auf Transpositionen bezogen und in ihren Resultaten Eigenschaften der Gattungsdiscriminanten nachwiesen, können ohne besondere Modificationen auf den Fall erweitert werden, dass wir Substitutionen von bestimmten anderen Typen betrachten. So sieht man z. B.: *Enthält $G_1$ überhaupt keine Substitutionen des Typus*

$$(x_1x_2x_3) \quad oder \quad (x_1x_2)(x_3x_4),$$

*so besitzt keine Gattung $\mathfrak{G}'_1$ von Wurzeln einer zur Classe $(\mathfrak{G}_1;\ \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ gehörigen Gleichung Divisorensysteme zweiter Stufe, welche den Discriminanten $D_{y'_1}$ aller Functionen $y'_1$ der Gattung gemeinsam wären.*

*Kommen alle Substitutionen eines bestimmten Typus, welche in $G_1$ enthalten sind, auch in der Untergruppe $G'_1$ vor, so besitzen die Discriminanten von Functionen der Gattung $\mathfrak{G}'_1$. kein Divisorensystem gemeinsam, welches aus den Substitutionen jenes Typus entspringt.*

Ein allgemeines hierher gehöriges Theorem leiten wir auf folgende Art ab: Wir verstehen unter $\gamma$ eine zur Galois'schen Gattung gehörige Function bei einer allgemeinen Gleichung $n^{ten}$ Grades, so dass für $\gamma$ die Maximalzahl von Werten $n! = N$ besteht. Auf die Reihe

$$(\Gamma) \qquad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_N$$

dieser Werte wird die Gruppe sämmtlicher Substitutionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ angewendet, und jede der hierdurch hervorgerufenen Gruppirungen der $\gamma$ als eine Permutation der Elemente $\gamma$ gegenüber der Anordnung $(\Gamma)$ betrachtet. Die so entstehenden Substitutionen bilden eine Gruppe $\Sigma$ der Ordnung $N = n!$, welche der Gruppe $S$ aller Substitutionen unter den $x$ einstufig isomorf ist. Jede Substitution von $\Sigma$ setzt alle Elemente $\gamma$ um; ferner ist eine jede regulär (Vgl. Substitutionentheorie § 89). Die Sub-

stitutionen, welche Divisorensysteme von möglichst niedriger Stufe hervorrufen, haben demnach die Form $(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)\dots(\gamma_{N-1}\gamma_N)$ und die Divisorensysteme sind somit von der Stufe $\frac{1}{2}N = \frac{1}{2}n!$.

*Es giebt Classen von Gleichungen der Grade $n!$, deren Gattungen als Divisorensysteme der Discriminanten nur solche der Stufe $\frac{1}{2}n!$ oder solche von höherer Stufe besitzen.*

Als Beispiel wählen wir den Fall $n = 3$. Dann wird $\Sigma$ die Substitutionen

$$1,\ (\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)(\gamma_5\gamma_6),\ (\gamma_1\gamma_4)(\gamma_2\gamma_5)(\gamma_3\gamma_6),\ (\gamma_1\gamma_6)(\gamma_2\gamma_3)(\gamma_4\gamma_5)$$
$$(\gamma_1\gamma_3\gamma_5)(\gamma_2\gamma_6\gamma_4),\ (\gamma_1\gamma_5\gamma_3)(\gamma_2\gamma_4\gamma_6)$$

enthalten; setzt man $\gamma = x_1x_2^2$ und nimmt man

$$x^3 + c_2x - c_3 = 0$$

als diejenige Gleichung, deren Wurzeln $x_1,\ x_2,\ x_3$ sind, so wird die Gleichung sechsten Grades für $\gamma$ die folgende sein:

$$\gamma^6 + 3c_3\gamma^5 + (6c_3^2 + c_2^3)\gamma^4 + (7c_3^3 + 2c_2^3c_3)\gamma^3 + c_3^2(6c_3^2 + c_2^3)\gamma^2 + 3c_3^5\gamma + c_3^6 = 0.$$

Sie hat also die Eigenschaft, dass die Discriminante jeder beliebigen Function ihrer Wurzeln von Divisorensystemen erster und zweiter Stufe frei ist.

Die nachstehende zweite Methode führt zu ähnlichen Resultaten. Wir nehmen $y_1$ als eine beliebige Function $\rho^{ter}$ Ordnung, welche zu der beliebigen Gruppe $G_1$ gehören möge. Die $\rho$ Werte von $y_1$ sollen

(Y) $$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots,\ y_\rho$$

sein. Wir setzen voraus, dass $\rho > 2$ angenommen werde. Auf die Reihe (Y) wenden wir alle Substitutionen der alternirenden Gruppe $\mathfrak{A}$ von $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ an. Ist $G_1$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so liefert die Anwendung von $\mathfrak{A}$ auf $y_1$ nur die Hälfte aller Werte dieser Function

(Y') $$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots,\ y_{\frac{\rho}{2}};$$

ist $G_1$ dagegen nicht in der alternirenden Gruppe enthalten, so bekommen wir aus $y_1$ alle $\rho$ Werte (Y). Je nachdem der eine oder der andere dieser beiden Fälle eintritt, erhalten wir durch die Anwendung von $\mathfrak{A}$

auf (Y′) resp. (Y) eine transitive Gruppe $A$ von $\frac{\rho}{2}$ oder von $\rho$ Elementen. Es ist $A$ von der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ und einstufig isomorf zu $\mathfrak{A}$; denn zwei von einander verschiedene Substitutionen von $\mathfrak{A}$ müssen verschiedene Substitutionen von $A$ hervorrufen. Weil ferner $\mathfrak{A}$ einfach ist, so kann auch $A$ nicht zusammengesetzt sein. (Substitutionentheorie § 88.)

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, ob $A$ primitiv oder imprimitiv ist. Im ersteren darf, falls $\rho$ eine gewisse von $p$ abhängige Grenze überschreitet, $A$ keine cyklische Substitution einer Primzahlordnung enthalten, welche kleiner oder gleich $p$ ist: denn sonst ginge (a. a. O. § 74 ff.) $A$ in die alternirende oder die symmetrische Gruppe der $\frac{\rho}{2}$ resp. $\rho$ Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$ über, was wegen der bekannten Sätze über die Grösse von $\rho$ in Beziehung auf $n$ nicht möglich ist.

Hinsichtlich des Falles einer imprimitiven Gruppe $A$ erinnern wir uns an einen Satz (a. a. O. § 84, Zusatz II), welcher in der correcten Fassung folgendermassen lautet: Jede imprimitive Gruppe ist zusammengesetzt, falls sie von der Einheit verschiedene Substitutionen besitzt, welche die einzelnen Systeme der Imprimitivität ungeändert lassen. Nun ist $A$ einfach, und somit darf diese Gruppe keine Substitutionen enthalten, welche lediglich die Elemente der einzelnen Systeme unter einander umsetzen. Es dürfen demnach in $A$ überhaupt keine cyklischen Substitutionen von Primzahlordnung vorkommen, weil diese gar nicht Elemente verschiedener Systeme enthalten können. Hieraus erhellt: *Die Classe der durch $A$ charakterisirten Gleichungen des Grades $\frac{1}{2}\rho$ oder $\rho$ und der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ enthält nur solche Gattungen von Wurzeln, deren Discriminanten keine Divisorensysteme besitzen, welche aus einer cyklischen Substitution der Primzahlordnung $q < p$ entspringen; $p$ ist dabei eine von $\rho$ abhängige Zahl, die mindestens den Wert 3 hat.*

Dass wir bei der Durchführung ähnlicher Untersuchungen zu ähnlichen Resultaten gelangen können, mag folgendes Beispiel zeigen.

Die Wurzeln von

$$x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4 = 0$$

seien $x_1, x_2, x_3, x_4$. Wir setzen

$$y_1 = x_1x_2,\ y_2 = x_1x_3,\ y_3 = x_1x_4,\ y_4 = x_2x_3,\ y_5 = x_2x_4,\ y_6 = x_3x_4$$

und wenden auf die $x$ die symmetrische Gruppe dieser vier Elemente an. Dadurch werden 24 Substitutionen unter den $y_1, y_2, \ldots, y_6$ hervorgerufen, welche eine zur symmetrischen Gruppe $S$ von $x_1, \ldots, x_4$ einstufig isomorfe Gruppe $\Sigma$ bilden. Diese umfasst die folgenden Substitutionen

$$1, \quad (y_1y_2)(y_5y_6),\ (y_1y_3)(y_4y_6),\ (y_1y_4)(y_3y_6),\ (y_1y_5)(y_2y_6),$$
$$(y_1y_6)(y_2y_5),\ (y_1y_6)(y_3y_4),\ (y_2y_3)(y_4y_5),\ (y_2y_4)(y_3y_5),\ (y_2y_5)(y_3y_4),$$
$$(y_1y_2y_3)(y_4y_5y_6),\ (y_1y_3y_2)(y_4y_6y_5),\ (y_1y_2y_4)(y_3y_6y_5),\ (y_1y_4y_2)(y_3y_5y_6),$$
$$(y_1y_3y_5)(y_2y_6y_4),\ (y_1y_5y_3)(y_2y_4y_6),\ (y_1y_4y_5)(y_2y_6y_3),\ (y_1y_5y_4)(y_2y_3y_6),$$
$$(y_1y_2y_6y_5)(y_3y_4),\ (y_1y_5y_6y_2)(y_3y_4),\ (y_1y_3y_6y_4)(y_2y_5),$$
$$(y_1y_4y_6y_3)(y_2y_5),\ (y_2y_3y_5y_4)(y_1y_6),\ (y_1y_4y_6y_3)(y_2y_5).$$

Die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_6$ sind, lautet

$$y^6 - 3c_1y^5 + (2c_2 + 3c_1^2)y^4 + (4c_1c_2 + c_1^3)y^3 + (-4c_4 + c_3c_1 + c_2^2 + 2c_2c_1^2)y^2$$
$$- (30c_5 + 4c_4c_1 - c_3c_1^2)y + (32c_6 - 7c_5c_1 - c_3^2 - c_4c_1^2 + c_3c_2c_1) = 0;$$

die Gruppe derselben ist $\Sigma$. Aus der Beschaffenheit ihrer Substitutionen geht hervor, dass keine Gattung der Wurzeln $y$ existirt, für welche die Discriminanten der zugehörigen Functionen einen Teiler oder auch ein Divisorensystem dritter oder fünfter Stufe gemeinsam hätten.

## § 7.

Für die nun folgenden allgemeineren Entwickelungen sind einige teils bekannte, teils leicht zu beweisende Hülfssätze nötig, welche hier zusammengestellt werden sollen:

I. Gehören zu einer Gruppe $G$ alle Substitutionen eines bestimmten beliebigen Typus, so ist $G$ entweder die alternirende oder die symmetrische Gruppe.

II. Jede Gruppe, welche nicht unter der alternirenden steht, ist zusammengesetzt; diejenigen ihrer Substitutionen, welche in der alternirenden Gruppe vorkommen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe mit 2 als Factor der Zusammensetzung.

III. Wendet man auf eine beliebige Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Substitutionen der $x$ an, so entsteht unter den $\rho$ Werten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ eine transitive Gruppe.

IV. Entsprechende Substitutionen isomorfer Gruppen besitzen gleiche Ordnung.

V. Ist eine Gruppe einfach oder zusammengesetzt, so ist jede ihr isomorfe Gruppe gleichfalls entsprechend einfach oder zusammengesetzt.

VI. Jede isomorfe transitive Gruppe $\Gamma$ von $G$ entspricht einer Untergruppe $H$ von $G$ derart, dass der Grad von $\Gamma$ gleich dem Quotienten aus den Ordnungen von $G$ und $H$ ist. Ist also z. B. $G$ die alternirende Gruppe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so ist $\Gamma$ von einem der Grade $1, n, n(n-1), \ldots$

Wir bezeichnen nun durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$ die alternirende und die symmetrische Gruppe der $n$ Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ die $\rho$ Werte einer rationalen ganzen Function $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Wenden wir alle Substitutionen von $\mathfrak{A}$ oder von $\mathfrak{S}$ auf die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ an, dann kann man die hervorgerufenen Umstellungen als Substitutionen unter den $\varphi$ deuten; die so entstehenden Gruppen seien entsprechend $A$ oder $\Sigma$; $\Sigma$ ist transitiv in den $\rho$ Werten $\varphi$ (Hülfss. III). Käme in $\Sigma$ eine Transposition $\tau = (\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ vor und diese entspräche (Hülfss. IV) der Substitution zweiter Ordnung $t = (x_a x_b)(x_c x_d) \ldots$ in $\mathfrak{S}$, dann würden allen Substitutionen $t, t', t'', \ldots$ in $S$, welche von demselben Typus sind wie $t$, in $\Sigma$ Transpositionen $\tau, \tau', \tau'', \ldots$ entsprechen, da die Operationen $s^{-1}ts$ und $\sigma^{-1}\tau\sigma$ einander entsprechen. Ebenso würden ferner die Gruppen $G = \{t, t', t'', \ldots\}$ und $\Gamma = \{\tau, \tau', \tau'', \ldots\}$ einander isomorf sein. Gemäss Hülfss. I ist $G$ alternirend oder symmetrisch, also $\Gamma$ entweder gleich $A$ oder gleich $\Sigma$; da $\Gamma$ die Transposition $(\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ enthält, ist sie zusammengesetzt (Hülfss. II); demnach gilt dasselbe von $G$ (Hülfss. V); also ist $G = S$ und $\Gamma = \Sigma$. Sobald eine transitive Gruppe $\Gamma$ eine Transposition enthält, ist sie symmetrisch, und sonach von der Ordnung $\rho!$. Wir haben also $\rho! = n!$, da $\Sigma$, $S$ einstufig isomorf sind; folglich ist $\rho = n$, d. h. *sobald* $\rho > n$ *wird, giebt es keine Substitution unter den* $x$, *welche* $\rho - 2$ *Werte der* $\rho$*-wertigen Function* $\varphi$ *gleichzeitig ungeändert liessen.*

Es gilt ferner die bemerkenswerte Erweiterung dieses Satzes: *sobald* $\rho > n$ *ist, enthält* $\Sigma$ *keine cyklischen Substitutionen, deren Ordnung eine Primzahl ist.* Dies beweisen wir folgendermassen: Wenn $\Sigma$ eine Substitution $\tau$ der $\varphi$ einer Primzahlordnung enthielte, und wenn unter $t$ die entsprechende Sub-

stitution unter den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstanden wird, dann muss $t$ mindestens einen Cyklus besitzen, welcher dieselbe Ordnung hat, wie $\tau$. Diese Ordnung sei $q$; ferner sei $t = (x_1 x_2 \ldots x_q)(x_{q+1} \ldots) \ldots$ In $\mathfrak{S}$ giebt es die Substitution $t_1 = (x_1 x_3 x_2 \ldots x_q)(x_{q+1} \ldots) \ldots$, welche aus $t$ durch Transformation mit $(x_2 x_3)$ hervorgegangen ist. Ihr entspreche $\tau_1$ in $\Sigma$. Da nun $t_1 . t^{-1} = (x_1 x_2 x_3)$ wird, so muss $\tau_1 . \tau^{-1}$ eine Substitution dritter Ordnung sein, woraus folgt, dass $\tau$, $\tau_1$ gemeinsame Elemente haben, da sonst $\tau_1 . \tau^{-1}$ von der Ordnung $q$ bleiben würde. Transformirt man $t_1 t^{-1} = (x_1 x_2 x_3)$ durch $t$ und seine Potenzen, so erkennt man, dass die erhaltenen Substitutionen eine transitive Gruppe entstehen lassen, welche $(x_1 x_2 x_3)$ umfasst und folglich die alternirende Gruppe $\mathfrak{A}_1$ der verbundenen $q$ Elemente $x_1, x_2, \ldots x_q$ wird. Die entsprechende Gruppe $A_1$ in $\Sigma$ enthält höchstens $2q - 1$ Elemente. Sind die Elemente transitiv mit einander verbunden, dann folgt aus Hülfss. VI, dass es nur $q$ sein können und daraus, dass auch die Gruppe $A_1$ alternirend in $q$ Elementen $\varphi$ ist und demnach ein $(\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma)$ enthält. Die transitive Gruppe $\Sigma$ umfasst $(\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma)$, enthält also die alternirende Gruppe der $\rho$ Elemente $\varphi$ und da endlich $\Sigma$ wie $\mathfrak{S}$ zusammengesetzt dagegen $A$ wie $\mathfrak{A}$ einfach ist, so wird $\Sigma$ symmetrisch, $\rho!$ wird $= n!$ und $\rho = n$. Intransitiv kann $A_1$ nicht sein, da jeder intransitive Teil mindestens $q$ Elemente enthalten müsste.

Als Zusätze ergeben sich: *Sobald $\rho > n$ ist, enthält $\Sigma$ keine Substitution, welche potenzirt eine cyklische Substitution liefert, deren Ordnung gleich einer Primzahl wäre; ebensowenig eine Substitution von einem der Grade 5 oder 7.*

Die Schlüsse, welche man aus diesen verschiedenen Sätzen auf die Divisorensysteme von Discriminanten machen kann, sind so ersichtlich, dass sie nicht aufgeführt zu werden brauchen. Nur der erste und einfachste sei hervorgehoben: *Wendet man auf die $\rho$ Werte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ von $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Substitutionen der $x$ an, so bestimmt die hierdurch gebildete zur symmetrischen Gruppe der $x$ isomorfe Gruppe der $\varphi$ eine Classe von Gleichungen $\rho^{\text{ten}}$ Grades; für keine Gattung ihrer Wurzeln besitzt die zugehörige Discriminante Divisorensysteme erster oder zweiter Stufe.*

Berlin d. 19 Januar 1883.

# ACTA MATHEMATICA, 1. 1882/1883.

## INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

## Das Bild von Abel

welches im ersten Bande der Acta Mathematica erscheint, ist ein im Atelier des Herrn J. Jæger in Stockholm verfertigter Lichtdruck und bildet die directe und genaue Copie einer im Jahre 1826 in Paris von dem norwegischen Künstler Görbitz angefertigten Tusch- und Federzeichnung. Das Original gehört Frau Thekla Lange, Tochter der Schwester Abels, Frau Elisabeth Böbert.

*Der Redacteur.*

## Le portrait d'Abel

qui accompagne le premier volume des Acta Mathematica, est une héliotypie sortant des ateliers de M. J. Jæger à Stockholm. C'est la copie directe et fidèle d'un dessin fait à Paris en 1826 à la plume et à l'encre de Chine par l'artiste norwégien Görbitz. L'original appartient à M^me Thekla Lange, fille de la soeur d'Abel, M^me Elisabeth Böbert.

*Le rédacteur.*

